



Analyse et modélisation de haute précision pour l'orientation de la Terre

Sebastien Lambert

► To cite this version:

Sebastien Lambert. Analyse et modélisation de haute précision pour l'orientation de la Terre. Sciences de la Terre. Observatoire de Paris, 2003. Français. NNT : . tel-00008856

HAL Id: tel-00008856

<https://theses.hal.science/tel-00008856>

Submitted on 23 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS
EN DYNAMIQUE DES SYSTEMES GRAVITATIONNELS**

**ANALYSE ET MODELISATION
DE HAUTE PRECISION
POUR L'ORIENTATION DE LA TERRE**

SEBASTIEN LAMBERT

Soutenue à l'Observatoire de Paris le 24 octobre 2003 devant le jury composé de :

Ana Gómez

Véronique Dehant

Dennis D. McCarthy

Patrick Charlot

Nicole Capitaine

Christian Bizouard

Présidente

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Directrice de thèse

Co-Directeur de thèse

Table des matières

Résumé	5
Summary	7
Introduction	9
1 Modélisation de haute précision de l'orientation terrestre : application de nouveaux concepts	13
1.1 Repères fixes et repère instantané	13
1.1.1 Le repère terrestre	14
1.1.2 Le repère céleste	14
1.1.3 Les composantes de la rotation terrestre	15
1.1.4 Principe de la paramétrisation de l'orientation terrestre	18
1.2 La transformation classique entre repère terrestre et repère céleste	20
1.2.1 Nomenclature des plans et des angles fondamentaux	20
1.2.2 La transformation classique	22
1.2.3 Imperfections de la transformation classique	26
1.2.4 Détermination de l'orientation de la Terre et données disponibles	27
1.3 La nouvelle transformation basée sur l'Origine Non-Tournante	32
1.3.1 Le point origine et la condition de non-rotation	32
1.3.2 Des nouveaux paramètres	32
1.3.3 Déplacement du point origine, quantités s et s'	33
1.3.4 La transformation	35
1.3.5 Relation entre les X , Y et les $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$	37
1.4 Les modèles de précession-nutation	39
1.4.1 Le modèle IAU1980	39
1.4.2 Le modèle IAU2000	39
1.5 Modélisation pour la nouvelle transformation	43
1.5.1 Les coordonnées célestes du pôle	43
1.5.2 La quantité s	44
1.5.3 La quantité s'	54
1.5.4 Comparaison aux valeurs observées	58
1.6 Conclusion	63

2	Analyse des effets des couches fluides externes sur la rotation terrestre	65
2.1	Dynamique de la rotation de la Terre	
	en présence de couches fluides externes	66
2.1.1	Description du mouvement de l'axe instantané de rotation	66
2.1.2	Effet sur les paramètres d'orientation terrestre	68
2.1.3	Méthode du moment cinétique	70
2.1.4	Méthode des moments de force	75
2.2	Les séries d'excitation atmosphérique et	
	océanique disponibles	77
2.2.1	Séries d'excitation atmosphérique	77
2.2.2	Séries d'excitation océanique	82
2.2.3	Cohérence entre les différentes séries	82
2.3	Bilan des effets atmosphériques et océaniques sur l'orientation de la Terre .	84
2.3.1	Effets sur le mouvement du pôle	84
2.3.2	Effets sur la longueur du jour	90
2.3.3	Effets sur la nutation	94
2.4	Excitation du mouvement libre de Chandler	100
2.4.1	Caractérisation du bruit exciteur	100
2.4.2	Evaluation de l'excitation atmosphérique et océanique	101
2.5	Le problème de la variabilité temporelle	
	de l'excitation géophysique	103
2.5.1	Excitation annuelle et saisonnière équatoriale	104
2.5.2	Excitation annuelle et saisonnière axiale	104
2.5.3	Excitation annuelle et saisonnière dans l'espace	
	et nutations	104
2.6	Les effets lunisolaires sur l'atmosphère	
	et les conséquences sur la rotation terrestre	108
2.6.1	Expression du moment des forces	108
2.6.2	Effet sur la précession-nutation d'une Terre rigide	113
2.7	Conclusion	115
3	Couplages entre la vitesse de rotation de la Terre	
	et la précession-nutation	117
3.1	Expressions pour le calcul des nutations	118
3.1.1	Moment des forces extérieures sur la Terre entière	118
3.1.2	Equations pour une Terre homogène et élastique	121
3.1.3	Equations pour un modèle de Terre avec manteau élastique et noyau	
	liquide découplé	126
3.1.4	Méthode hamiltonienne (ou lagrangienne) pour le calcul des nuta-	
	tions d'une Terre rigide	129
3.2	Variations de l'ellipticité dynamique dues aux	
	marées zonales	131
3.3	Effets de couplage avec la précession-nutation	132
3.3.1	Résolution hamiltonienne	132
3.3.2	Résolution par les équations de Liouville	134
3.4	Discussion	140
3.5	Conclusion	142

Conclusion et perspectives	145
Annexes	149
A Les arguments de la nutation	149
A.1 Les arguments de Delaunay	149
A.2 Les arguments planétaires	150
A.3 Le cumul de précession	151
A.4 Les variables de Doodson	151
B Le logiciel GREGOIRE	153
C Quelques notions d'analyse du signal	158
C.1 Notions de base sur les séries temporelles	158
C.1.1 Condition sur les périodes observables	158
C.1.2 Résolution spectrale et période de modulation	159
C.2 Méthodes d'analyse spectrale	159
C.2.1 La transformée de Fourier	159
C.2.2 La fenêtre glissante	161
C.2.3 La transformée en ondelettes	162
C.2.4 L'analyse spectrale singulière	162
C.3 Caractérisation du bruit par la variance d'Allan	163
D Analyse des résidus IAU2000A	164
E Quelques formules utiles...	169
E.1 Conversion de la date julienne modifiée en année besselienne	169
E.2 J2000.0 et les dates juliennes	169
E.3 Correspondance entre la fréquence dans la Terre et la fréquence dans l'espace	169
E.4 Valeurs numériques	170
Références bibliographiques	171

Résumé

L'accroissement de la précision des techniques de géodésie spatiale et d'astrométrie globale donnant accès à l'orientation terrestre et l'amélioration des systèmes de référence céleste et terrestre requièrent, pour un meilleur profit scientifique, de réaliser une modélisation plus précise de la rotation de la Terre.

Dans ce but, l'Union Astronomique Internationale a recommandé en août 2000 une paramétrisation plus fine de la rotation terrestre. La première partie de cette thèse est consacrée à la mise en oeuvre des recommandations, dont l'entrée en vigueur était le 1er janvier 2003 et au calcul des modèles adaptés à la nouvelle représentation astrométrique basée sur l'Origine Non-Tournante (Guinot 1979, Capitaine et al. 2000) : coordonnées célestes X et Y du pôle intermédiaire (CIP) et quantité s donnant la position de l'Origine Non-Tournante dans le repère céleste (CEO). Les calculs sont basés sur le nouveau modèle de précession-nutation IAU2000A (Dehant 2002, Mathews et al. 2002) et sur les récentes estimations des paramètres de raccordement des repères de référence (Folkner et al. 1994, Chapront et al. 2002). Une première modélisation de la quantité s' donnant le déplacement de l'origine des longitudes dans le repère terrestre est également réalisée à partir du mouvement du pôle observé.

Les couches fluides externes (atmosphère et océans) jouent un rôle majeur dans la partie non-prédictible de la rotation de la terre (Barnes et al. 1980, Brzeziński et al. 2002). Dans la seconde partie de cette thèse, un bilan de ces effets sur les paramètres d'orientation de la Terre est réalisé à partir des données météorologiques les plus récentes. Outre la contribution moyenne de l'atmosphère et de l'océan sur les périodes de temps couvertes par les séries (80 mas pour le terme annuel du mouvement du pôle et 0.4 ms pour le terme annuel de la longueur du jour), nous avons étudié la variabilité temporelle de l'excitation périodique et nous montrons sa forte corrélation avec les variations des amplitudes observées dans le mouvement du pôle et la longueur du jour. L'excitation des nutations par les couches fluides reste délicate à estimer en raison de la qualité médiocre des données météorologiques dans le domaine diurne, de l'ordre de grandeur très faible de ces effets (environ 80 μ as sur le terme annuel) et de la forte variabilité de l'excitation. Nous montrons aussi que le moment cinétique de l'atmosphère est affecté par le moment de force lunisolaire, donnant un effet sur la précession de la Terre solide dont la valeur est supérieure à la précision des observations actuelles (-28 mas/siècle), ainsi qu'un effet de -115 μ as sur la nutation principale en longitude et 46 μ as sur la nutation en obliquité.

Dans le cadre de l'implémentation du modèle de précession-nutation IAU2000A, il est devenu nécessaire de considérer tous les effets sur l'orientation terrestre dont les amplitudes atteignent quelques dizaines de microsecondes d'arc. Parmi ces effets, il y a ceux

provoqués sur les nutations par les variations de l'ellipticité dynamique de la Terre. Ces dernières induisent, par conservation du moment cinétique de la Terre solide, des changements dans la vitesse de rotation (typiquement 0.5 ms sur la longueur du jour) et sont déjà prises en compte dans le temps universel (UT1). Elles sont modélisées pour des modèles de Terre plus ou moins raffinés (Yoder et al. 1981, McCarthy 1996). L'effet de telles variations sur les nutations a été évalué plus récemment sous plusieurs approches (Souchay et Folgueira 1999, Bretagnon 2000, Mathews et al. 2002) présentant des résultats disparates. Dans la troisième partie de cette thèse, nous élucidons les différences et nous déterminons un modèle exhaustif pour une Terre réelle permettant de corriger les angles de nutation (effet majeur de $137 \mu\text{as}$ sur la nutation principale en longitude et $-6 \mu\text{as}$ pour l'obliquité, -3 mas/siècle pour la vitesse de précession en longitude de la Terre solide).

Summary

The increase of accuracy of the space and geodetic techniques giving access to the Earth orientation, as well as the improvement of the terrestrial and celestial reference systems, require, for a best scientific benefit, a more precise modelling of the Earth rotation.

With this aim, the International Astronomical Union recommended, in August 2000, a new parametrization in the Earth orientation. The first part of this thesis is devoted to the implementation of these recommendations, which became effective on 1 January 2003, and to the computation of the models adapted to the new astrometric representation based on the Non-Rotating Origin (Guinot 1979, Capitaine et al. 2000). These models concern the celestial coordinates X and Y of the Celestial Intermediate Pole (CIP), and the quantity s providing the position of the CEO. Such developments are based on the new precession-nutation model IAU2000A (Dehant 2002, Mathews et al. 2002) and on the recent estimates of the connexion parameters between reference frames (Folkner et al. 1994, Chapront et al. 2002). We present also a model for the quantity s' giving the displacement of the origin of the longitudes in the terrestrial frame, derived from the observed polar motion.

External fluid layers (atmosphere and oceans) play a prominent part in the non-predictible part of the Earth rotation (Barnes et al. 1980, Brzeziński et al. 2002). In the second part of this thesis, we present an overall evaluation of these effects on the Earth Orientation Parameters, based on the more recent meteorological data. Besides the mean contribution of atmosphere and oceans during the time spans covered by the series (80 mas for the annual term in the polar motion and 0.4 mas for the annual term in the length of day), we study the temporal variability of the periodic terms and we show its strong correlation with the corresponding observed variations in the polar motion and the length of day. Estimating the excitation of nutations by fluid layers remains a delicate operation because of the lack of data in the diurnal frequency band, the small size of these effects (about 80 μ as for the annual term) and the strong variability of the excitation. We show also that the Atmospheric Angular Momentum is modified by the lunisolar torque giving an effect on the precession in longitude (-28 mas/century) and on the 18.6-year nutation (-115 μ as in longitude and 46 μ as in obliquity).

In the framework of the recent implementation of the IAU2000A precession-nutation model, it has become necessary to compute all the effects of which amplitudes are of the order of tens of microarcseconds. One of these effects is the coupling between the variations in the Earth's rotation rate due to zonal tides (typically 0.5 ms on the length of day) and the precession-nutation. These variations are taken into account in the computation of the Universal Time (UT1) and are modeled (Yoder et al. 1981, McCarthy 1996). Their effect

on nutation has recently been evaluated by different approaches (Souchay et Folgueira 1999, Bretagnon 2000, Mathews et al. 2002) with disparate results. In the third part of this thesis, we investigate the differences and we determine an exhaustive model for a real Earth allowing to correct the nutation angle. The major effect is on the 18.6-year nutation ($137 \mu\text{as}$ in longitude and $-6 \mu\text{as}$ in obliquity) and on the precession in longitude (-36 mas/century).

Introduction

Importance de la connaissance de la rotation terrestre

La connaissance de la rotation de la Terre dans l'espace est primordiale, dans des domaines aussi variés que l'astrométrie, la géodésie spatiale, la géophysique, la planétologie et l'astrophysique. En effet, l'orientation spatiale de la Terre doit être connue pour réduire les observations célestes depuis le sol, et elle s'avère également fondamentale pour le positionnement précis des engins spatiaux et des stations au sol. De plus, les variations de la rotation terrestre contiennent les signatures de la structure interne de notre planète (noyau, manteau) et de ses interactions avec l'atmosphère et les océans. On peut tirer de leur étude des informations précieuses sur certains paramètres internes. Enfin, la compréhension et la modélisation des phénomènes liés à la Terre est un outil pertinent pour ceux qui s'intéressent à l'étude des autres planètes.

Variations prédictibles et non-prédictibles

La rotation de la Terre autour de son centre de gravité est un mouvement fort complexe, induit par les corps du système solaire (Lune, Soleil, planètes), les couches fluides à la surface du globe ou dans la croûte (atmosphère, océans, eaux souterraines et réseau hydrologique) et conditionné par la structure interne de la planète (manteau, noyau liquide, graine solide) et sa rhéologie. Ce mouvement se décompose en une partie modélisable et une partie non-modélisable. La partie modélisable est celle qui provient de l'attraction gravitationnelle de la Lune, du Soleil et, dans une bien moindre mesure, des planètes, exercée sur le bourrelet équatorial de la Terre. Les mouvements réguliers des corps perturbateurs donnent naissance à des basculements périodiques de l'axe de rotation terrestre dans l'espace : c'est la précession-nutation. Les amplitudes de ces oscillations sont soumises aux lois de la mécanique céleste et sont prédictibles. En revanche, les effets de l'atmosphère, des océans, ou des mouvements au sein de la Terre restent difficilement prédictibles. Les raisons sont à rechercher dans notre méconnaissance des processus de circulation atmosphérique et océanique, et d'interaction (friction, charge) avec la croûte terrestre, des couplages topographiques ou électromagnétiques entre le manteau et le noyau.

Détermination astrométrique de la rotation terrestre

L'observation astronomique ou astrométrique s'effectue depuis des stations au sol dans un repère de référence terrestre. Les corps observés (Lune, étoiles, quasars) sont décrits dans le repère céleste. L'orientation de la Terre n'est autre que l'orientation relative de ces deux repères de référence, terrestre et céleste. La séparation entre variations lentes et rapides des angles d'orientation de la Terre, c'est à dire entre les basculements de l'axe de figure de la Terre et la rotation diurne, nécessite l'introduction d'un pôle céleste

intermédiaire (en anglais Celestial Intermediate Pole, CIP) restant voisin de l'axe de rotation instantané et de l'axe de figure. L'observation astrométrique donne ainsi accès à la position de cet axe intermédiaire à la fois dans le repère céleste et dans le repère terrestre. Le modèle de précession-nutation décrit la position de cet axe dans le repère céleste. Les observations permettent de déterminer les écarts entre le pôle intermédiaire observé et le pôle intermédiaire modélisé, ainsi que le vecteur séparant le pôle nord géographique de ce pôle céleste intermédiaire, vecteur usuellement rapporté au repère terrestre (mouvement du pôle). Les techniques d'observation actuelles comme la radio-interférométrie à très longue base (VLBI), le système de positionnement global (GPS), le tir laser sur satellites (SLR) ou sur la Lune (LLR) ou encore les déterminations d'orbites de satellites par décalage Doppler (DORIS) permettent de déterminer la direction de cet axe à quelques dixièmes de millisecondes de degrés près. L'accroissement constant de la précision de ces techniques conjugué à l'amélioration des systèmes de référence céleste et terrestre nécessitent, pour un meilleur profit scientifique, d'utiliser une modélisation de plus en plus fine de la rotation terrestre. Notre thèse s'inscrit dans un tel effort, et trois études complémentaires que nous introduisons à présent y contribuent.

Nouvelle paramétrisation astrométrique (Chapitre 1)

Dans ce but, l'Union Astronomique Internationale (UAI) a recommandé en août 2000 une paramétrisation plus fine de l'orientation terrestre, basée sur un nouveau modèle de précession-nutation (IAU2000A) issu d'une meilleure connaissance de la structure interne de la Terre. Ce modèle est basé sur une théorie plus précise de la précession-nutation de la Terre rigide, complétée par un certain nombre de paramètres géophysiques reflétant la non-rigidité et déduits des observations VLBI. Ce nouveau modèle permet donc un positionnement plus précis du CIP dans le repère céleste en réduisant les différences entre le pôle intermédiaire observé et le pôle intermédiaire modélisé. Cette amélioration s'accompagne d'un raffinement de la définition du CIP qui ne comprend que des termes de nutation dont la période est supérieure à deux jours, les termes plus rapides étant alors considérés dans le repère terrestre. En outre, l'UAI a recommandé l'utilisation d'une nouvelle représentation astrométrique utilisant l'Origine Non-Tournante, concept introduit dans la transformation entre repère terrestre et repère céleste par Bernard Guinot en 1979 et permettant une meilleure définition de l'angle de rotation de la Terre (UT1). Cette nouvelle représentation astrométrique demande d'établir de nouveaux modèles qui consistent en les coordonnées célestes du pôle intermédiaire et en la quantité s donnant l'origine des ascensions droites dans le repère céleste, les calculs étant basés sur les plus récentes estimations des paramètres de raccordement des systèmes de référence. Une première modélisation de la quantité s' donnant le déplacement de l'origine des longitudes dans le repère terrestre a également été réalisée à partir d'observations récentes du mouvement du pôle. Le Chapitre 1 est consacré à ces modélisations.

Caractérisation des effets non-prédictibles (Chapitre 2)

Parallèlement à ces recommandations, il est nécessaire de mieux comprendre et de mieux évaluer les effets non-prédictibles. L'atmosphère et les océans sont les principaux acteurs dans le mouvement du pôle, c'est à dire le mouvement du CIP mesuré dans le repère terrestre, et dans les variations de la longueur du jour. L'ordre de grandeur

de ces fluctuations est de 100 millisecondes d'arc pour le mouvement du pôle et de 1 milliseconde de temps pour la longueur du jour. La production de séries temporelles de moment cinétique atmosphérique est pratiquement routinière et les plus longues séries atteignent une longueur de 50 ans. La production de séries pour le moment cinétique océanique est encore difficile mais en constante amélioration ces dernières années, l'activité étant aujourd'hui représentée par un bureau spécial du Service International de la Rotation Terrestre (IERS). Le mouvement du pôle comme la longueur du jour possèdent une part prédictible. Pour le mouvement du pôle, il s'agit de la partie haute fréquence (périodes diurnes) dues aux marées océaniques. Pour la longueur du jour, ce sont les variations imputées aux marées zonales et dont les périodes s'étalent de 5 jours à 18.6 ans. En revanche, la partie à basse fréquence (variations saisonnières, annuelles, oscillation libre en 14 mois) du mouvement du pôle, et la partie restante de la longueur du jour, ne sont pas modélisables, en raison des fortes variations de l'excitation géophysique au cours du temps à ces mêmes périodes. L'atmosphère possède des variations diurnes importantes. Celles-ci donnent naissance à des nutations dont les périodes sont saisonnières ou annuelles et dont l'amplitude est de l'ordre de la cinquantaine de microsecondes d'arc. Si ces effets font partie des "candidats" pour nos investigations, ils sont malheureusement très délicats à estimer en raison de la qualité médiocre des données atmosphériques et de la sensibilité au modèle dans ce domaine de fréquence. Nous avons calculé la contribution moyenne de l'atmosphère et de l'océan sur le mouvement du pôle, sur la rotation sidérale (UT1) et sur la précession-nutation et nous avons montré la variabilité temporelle de cette contribution qui confère une forte incertitude aux effets estimés. Ces études font l'objet du Chapitre 2.

Couplage des marées zonales avec la précession-nutation (Chapitre 3)

Un effet modélisable dont l'amplitude est de l'ordre de la centaine de microsecondes d'arc est l'effet des marées zonales. Les marées zonales sont les modifications élastiques du bourrelet équatorial de la Terre, soumis à l'attraction lunisolaire et aux variations de la vitesse de rotation. Par conservation du moment cinétique, les modifications des moments d'inertie de la Terre induisent des changements dans la vitesse de rotation, et vice-versa. Comme les équations de la dynamique régissant le mouvement de l'axe de rotation contiennent à la fois la vitesse de rotation et les moments d'inertie, on peut connaître les variations correspondantes dans l'orientation terrestre. Ces effets sont déjà pris en compte dans le calcul de UT1 et donnent des fluctuations d'environ 0.4 millisecondes. Mais ils influencent aussi la précession-nutation à une hauteur de 100 microsecondes de degré. Les études de ce phénomène restant partielles, nous nous sommes attelés à sa modélisation rigoureuse et nous proposons un modèle permettant de corriger les angles de nutation de l'effet des marées zonales pour une Terre à manteau élastique et noyau liquide. Ceci fait l'objet du Chapitre 3.

Chapitre 1

Modélisation de haute précision de l'orientation terrestre : application de nouveaux concepts

Ce premier Chapitre est consacré à la représentation géométrique et cinématique de l'orientation terrestre, c'est à dire la transformation qui permet de passer d'un repère terrestre à un repère céleste. La modélisation de cette transformation (nous verrons qu'il s'agit d'une succession de plusieurs rotations) est cruciale pour les chaînes d'analyse de données astrométriques et géodésiques et les applications spatiales (navigation par satellites) ou terrestres (positionnement). A l'heure actuelle, on détermine l'orientation de la Terre dans l'espace avec une précision meilleure que la milliseconde d'arc (mas)¹. En août 2000, l'Union Astronomique Internationale a recommandé une paramétrisation plus fine de la rotation terrestre afin de permettre une meilleure détermination des différentes composantes de ce mouvement. L'étude présentée dans ce Chapitre est consacrée à la mise en oeuvre de ces recommandations, dont l'entrée en vigueur était le 1er janvier 2003. Notre contribution se situe au niveau du calcul des modèles adaptés à la nouvelle représentation astrométrique.

1.1 Repères fixes et repère instantané

L'orientation de la Terre dans l'espace est représentée formellement par une transformation de coordonnées entre deux repères de référence : le repère terrestre et le repère céleste adoptés comme références conventionnelles par la communauté internationale. Un intermédiaire utile est le repère instantané, lié à l'axe de rotation de la Terre et à une origine choisie sur l'équateur. Nous discuterons plus loin de l'utilité de ce repère intermédiaire.

¹La dénomination exacte de l'unité d'angle est seconde/milliseconde/microseconde de degré. Le terme de seconde/milliseconde/microseconde d'arc renvoie à la langue anglaise : arcsecond, milliarcsecond (mas), microarcsecond (μ as). Toutefois, pour simplifier la lecture de ce document et se rapprocher de ce que l'on rencontre généralement dans la littérature, nous adopterons la terminologie anglo-saxonne.

1.1.1 Le repère terrestre

Le repère fixe terrestre géocentrique (ITRF, International Terrestrial Reference Frame²) est la réalisation du système de référence terrestre (ITRS, International Terrestrial Reference System) adopté par l'UGGI (Union de Géodésie et Géophysique Internationale, aussi International Union for Geodesy and Geosciences, IUGG) en 1991. L'origine du repère est au plus près possible du centre de masse de la Terre (incluant l'atmosphère et les océans) et le repère est matérialisé par les coordonnées de diverses stations à la surface du globe dont on connaît les positions et les vitesses relatives et dont l'ensemble satisfait à une condition de non-rotation par rapport à la surface terrestre. Le plan fondamental de ce repère est l'équateur conventionnel. L'axe x du repère définit la référence des longitudes (direction de Greenwich).

On peut définir, dans la Terre, trois axes fondamentaux (voir la figure 1.1) :

- l'axe de figure, qui est l'axe de symétrie de l'ellipsoïde de révolution s'approchant le plus possible de la figure réelle de la Terre,
- l'axe des pôles géographiques ou axe du repère terrestre de référence,
- l'axe de rotation, qui n'est pas confondu avec l'axe de figure.

Le plan perpendiculaire à l'axe de figure et contenant le géocentre est appelé équateur de figure. Le plan perpendiculaire à l'axe des pôles géographiques et contenant le géocentre est appelé équateur géographique. Enfin, l'équateur "vrai" est le plan perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le géocentre.

On peut décrire l'orientation de la Terre à un instant donné par rapport à un repère inertiel grâce à trois angles nommés angles d'Euler (voir la figure 1.2). Un repère inertiel est construit au moyen d'une origine, prise au géocentre O , et de trois axes formant un trièdre direct ($OXYZ$). Les axes X et Y définissent un plan fondamental. Il convient de prendre comme plan fondamental le plan de l'écliptique moyen d'une époque de référence³ (appelée dans la suite "époque"). Le premier angle d'Euler, Ψ , est l'angle entre l'origine des longitudes sur l'écliptique moyen (équinoxe moyen de l'époque) et le noeud ascendant de l'équateur sur l'écliptique. Le second angle θ donne l'inclinaison entre l'écliptique et l'équateur, qui est aussi l'angle entre l'axe du repère inertiel et l'axe de figure. Enfin, le troisième angle Φ donne la longitude écliptique de l'origine du repère terrestre.

1.1.2 Le repère céleste

Le repère fixe céleste (ICRF, International Celestial Reference Frame), défini par un ensemble de coordonnées d'objets extragalactiques (quasars principalement), réalise le système de référence céleste (ICRS, International Celestial Reference System) adopté par

²Nous choisissons d'exprimer tous les sigles concernant les repères de référence ou les objets manipulés, selon la terminologie anglo-saxonne, telle qu'elle est couramment utilisée dans la littérature.

³Le plan de l'écliptique est défini ici par le produit vectoriel $\vec{r} \times \vec{v}$ où \vec{r} est le rayon vecteur du barycentre Terre-Lune et \vec{v} est la vitesse de ce barycentre dans le système solaire.

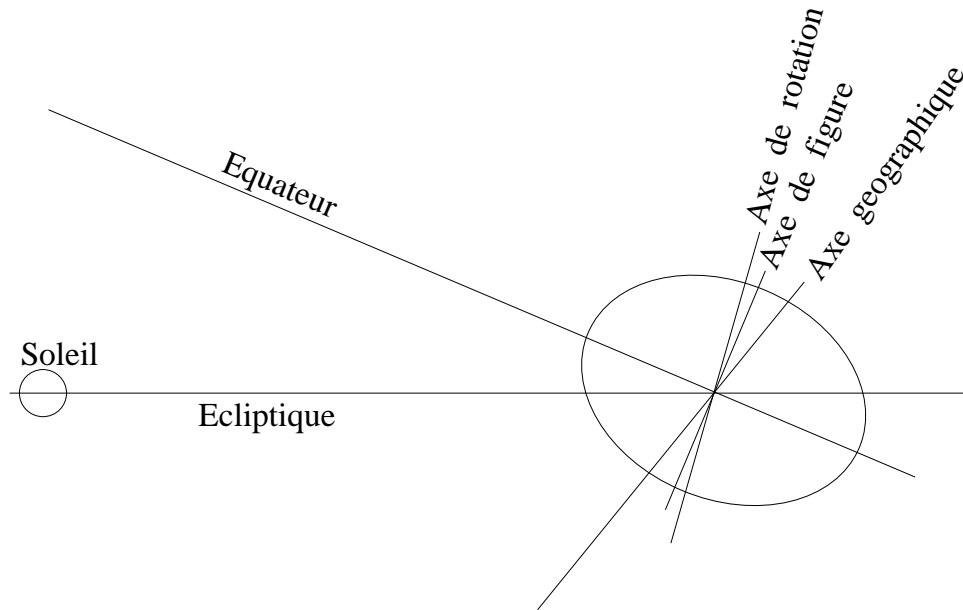


FIG. 1.1 – Les différents axes et plans de la Terre.

l'Union Astronomique Internationale (UAI, aussi International Astronomical Union, IAU) en 1997. 212 radiosources extragalactiques dont les positions sont connues à la précision des observations actuelles ($250 \mu\text{as}$ pour l'interférométrie radio à très longue base) sont utilisées comme sources de définition (Ma et al. 1998). Ces radiosources peuvent être considérées comme fixes, c'est à dire animées d'un mouvement propre indécélable sur la base des observations actuelles. Toutefois, leurs positions sur la sphère céleste sont affectées, dans un repère topocentrique, d'une aberration annuelle due à la vitesse de la Terre dans le système solaire. L'UAI a introduit en 2000 deux systèmes célestes : le système céleste géocentrique (Geocentric Celestial Reference System, ou GCRS) dont l'origine est au centre de masse de la Terre, et le système céleste barycentrique (Barycentric Celestial Reference System, ou BCRS) dont l'origine est au barycentre du système solaire, et dans lequel les sources ne présentent plus d'aberration. Le repère céleste est indépendant du pôle de l'écliptique comme du pôle de rotation. Il a été imposé que le plan fondamental du repère soit le plus proche possible de l'équateur moyen de l'époque de référence J2000.0. Il en est de même pour l'origine des ascensions droites sur cet équateur qui doit se rapprocher le plus possible de l'équinoxe dynamique de J2000.0. Toutefois, il subsiste des écarts qui peuvent être déterminés par l'observation (Folkner et al. 1994, Chapront et al. 2002).

1.1.3 Les composantes de la rotation terrestre

Précession-nutation

L'axe de figure de la Terre subit des variations d'orientation dans l'espace sous l'effet du couple gravitationnel externe (principalement lunisolaire mais aussi planétaire) sur le

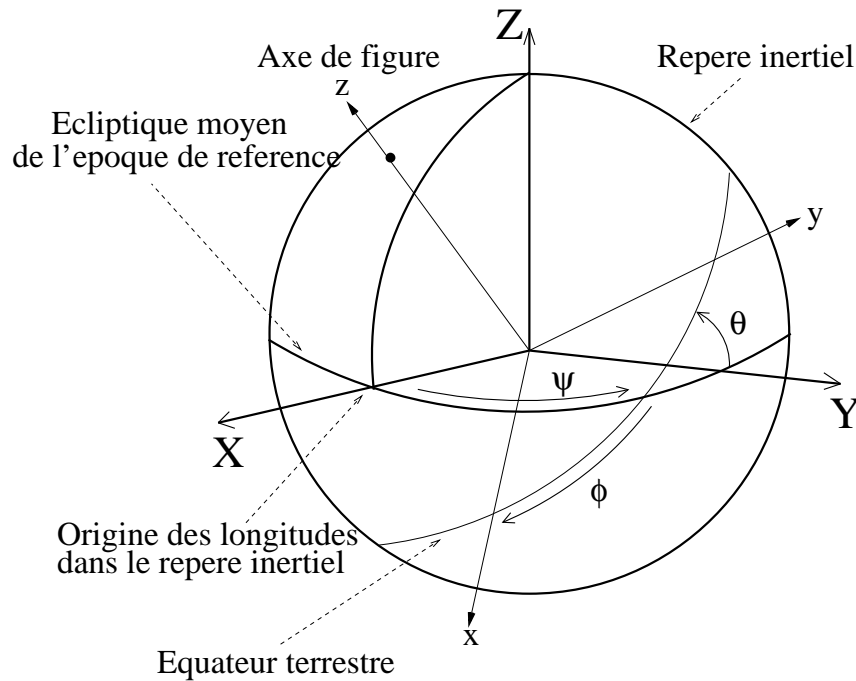


FIG. 1.2 – Les angles d'Euler.

bourrelet équatorial de la Terre, et, plus minoritairement, des couches fluides à la surface du globe et de la rotation libre du noyau fluide. L'axe de figure décrit ainsi un cône d'ouverture $23^{\circ}26'$ en 26000 ans, c'est la précession, due à l'action du couple lunisolaire constant sur le bourrelet équatorial de la Terre. Ce mouvement fut mis en évidence dès l'antiquité par Hipparque, et, en 1532, Copernic l'imputa à une variation de l'axe de rotation de la Terre. Il faudra attendre Newton pour en avoir une explication physique en 1687. Avec le formalisme des angles d'Euler, la précession correspond à une variation séculaire de l'angle Ψ .

Des oscillations plus rapides et de plus faibles amplitudes, causées par les variations périodiques du couple externe, constituent la nutation (variations périodiques des angles d'Euler Ψ et θ). La nutation principale est de période 18.6 ans et d'amplitude 17 secondes d'arc. Elle fut observée par Bradley en 1748 et l'année suivante, d'Alembert en donne l'explication avec la première théorie analytique de la précession-nutation pour une Terre rigide.

Mouvement du pôle

En 1765, Euler montre que si l'axe d'inertie et l'axe de rotation d'un corps ne sont pas confondus, alors l'axe de rotation décrit un cône autour de l'axe d'inertie. Ce mouvement est appelé mouvement libre. Il calcule que la Terre, alors considérée comme indéformable, devrait présenter un tel mouvement avec une période de 305 jours. En cumulant les observations de latitude apparente des stations d'observation, Küstner annonce l'existence de variations annuelles en 1884. Chandler, en 1891, découvre que ces variations se scindent en

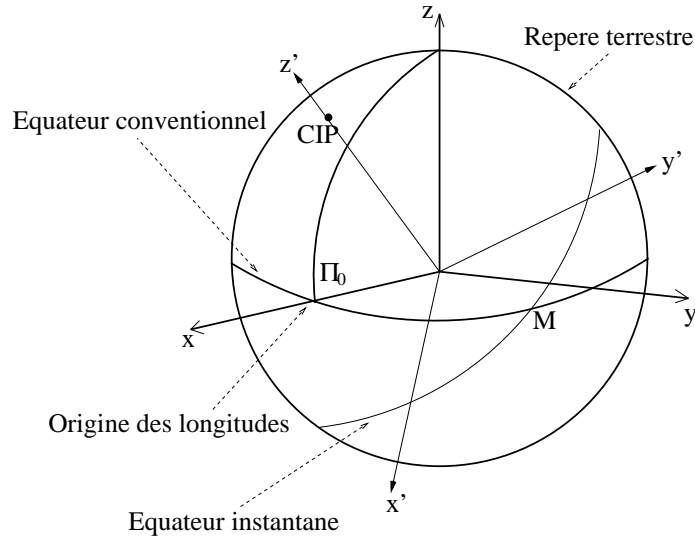


FIG. 1.3 – Repère fixe terrestre conventionnel (x, y, z) et repère instantané (ou repère intermédiaire du CIP) (x', y', z') .

un terme annuel et un terme de 14 mois. Ce terme de 14 mois est bien le mouvement libre prédit par Euler plus d'un siècle auparavant, mais sa période est modifiée par l'élasticité du manteau terrestre, par la présence d'un noyau fluide et des océans (l'effet centrifuge, en élevant le niveau des eaux près de l'équateur, modifie le moment d'inertie de la Terre globale) : elle est voisine de 433 jours. Dans l'état actuel des connaissances, le mécanisme d'excitation de ce mouvement libre est d'origine atmosphérique et océanique.

Outre cette oscillation libre dite "oscillation de Chandler" dont l'amplitude avoisine les 150 millisecondes d'arc, le mouvement du pôle comprend d'autres termes. Un terme annuel d'environ 100 mas est dû majoritairement à l'excitation atmosphérique. Pour concrétiser les idées, 100 mas correspondent à 3 mètres à la surface de la Terre. Une dérive du pôle de rotation est aussi observée (4 mas par an) dans la direction du Canada et imputée au rebond post-glaciaire (déformation lente de la croûte terrestre due à la fonte des calottes glaciaires polaires).

Vitesse de rotation et longueur du jour

La vitesse de rotation de la Terre autour de son axe n'est pas constante. Elle fluctue autour d'une valeur moyenne conventionnelle $\Omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/s dans une proportion atteignant 10 milliardièmes. Associée à cette vitesse de rotation, la durée du jour (Length of Day, LOD) fluctue également par rapport à sa valeur nominale de 86400 s. Ces variations sont attribuées à un couplage électromagnétique entre le noyau et le manteau (effet décennal dont l'amplitude est de l'ordre de 5 millisecondes), les marées zonales (variations de l'ellipticité dynamique de la Terre, amplitude maximale de 0.4 ms pour le terme en 13.66 jours) et les déplacements des masses atmosphériques (effet de 0.3 ms sur le terme annuel et 0.2 ms sur le terme semi-annuel).

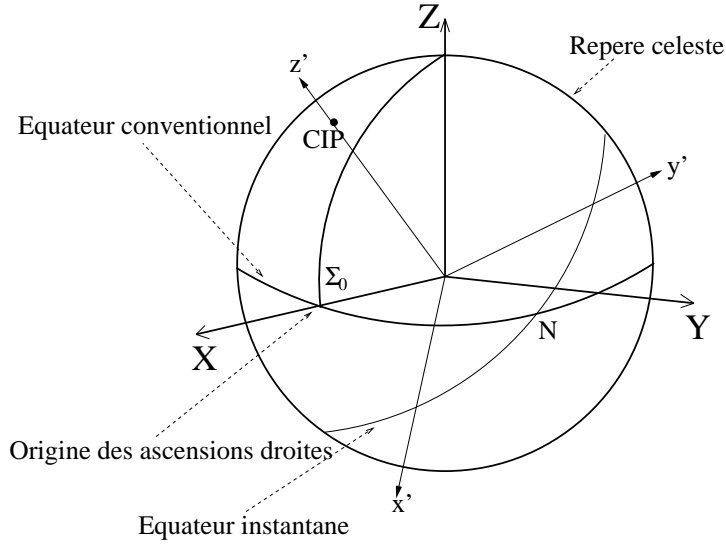


FIG. 1.4 – Repère fixe céleste conventionnel (X, Y, Z) et repère instantané (ou repère intermédiaire du CIP) (x', y', z') .

1.1.4 Principe de la paramétrisation de l'orientation terrestre

Le repère instantané

La construction des deux repères fixes (repère terrestre, TRF, et repère céleste, CRF) est conventionnelle. Le passage d'un repère à l'autre nécessite, dans l'idéal, 3 rotations élémentaires telles que celles assurées par les 3 angles d'Euler. Toutefois, à cause de la rotation diurne de la Terre sur elle-même, l'orientation de celle-ci change très rapidement dans l'espace (15 secondes d'arc en une seconde de temps). En conséquence, si on veut une détermination précise de tels paramètres d'orientation (avec une précision de l'ordre de la milliseconde d'arc), on devrait effectuer des observations extrêmement rapprochées les unes des autres (c'est à dire typiquement toutes les nanosecondes de temps), ce qui est totalement illusoire technologiquement. On peut séparer l'effet moyen de la rotation diurne des autres variations, beaucoup plus lentes associées aux basculements de l'axe de rotation et aux changements infimes de la vitesse de rotation. Dans cette optique, la description de la rotation entre le TRF et le CRF peut s'appuyer sur un repère intermédiaire lié à l'axe de rotation et nécessiter alors 5 paramètres au lieu de 3 :

- deux paramètres (u, v) pour donner la trajectoire du pôle de rotation dans le TRF,
- un paramètre pour évaluer la rotation de la Terre autour de son axe,
- deux paramètres (U, V) pour donner la trajectoire du pôle de rotation dans le CRF.

Le passage d'un repère fixe conventionnel au repère instantané lié à la Terre demande la réalisation de deux concepts :

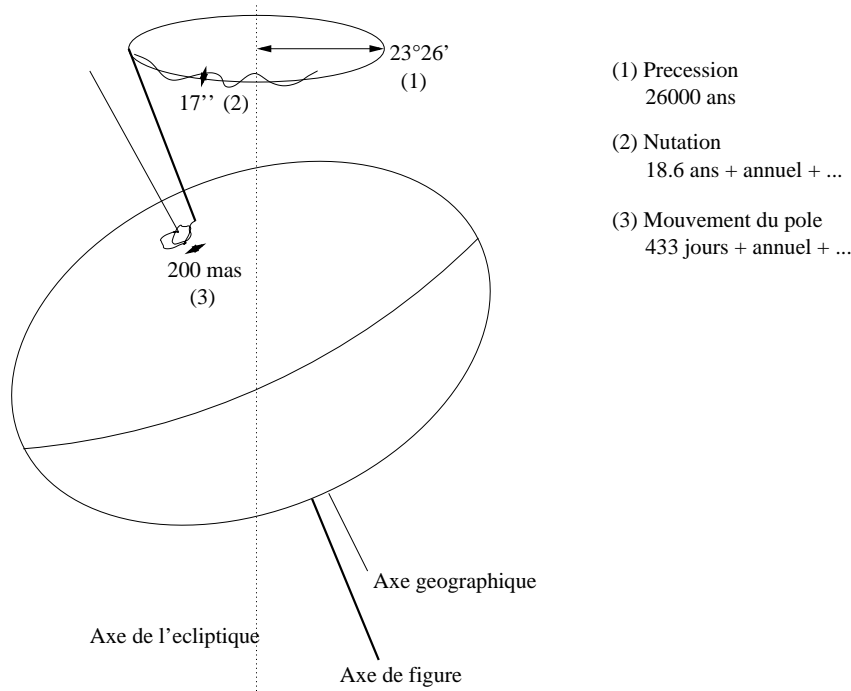


FIG. 1.5 – Précession-nutation et mouvement du pôle.

1 - Un pôle se rapprochant le plus possible du pôle instantané de rotation de la Terre dont la position est connue dans le repère fixe, et définissant un équateur instantané. Ce pôle doit être défini de manière géométrique et non cinématique, de telle sorte que (u, v) et (U, V) ne contiennent pas les mêmes mouvements comme ce serait le cas pour l'axe instantané de rotation.

2 - Un point origine sur cet équateur instantané, qui sera pris comme direction de l'axe x du repère intermédiaire et à partir duquel on pourra "compter" l'angle de rotation de la Terre autour de son axe instantané.

En août 2000, lors de l'assemblée générale de Manchester, l'UAI a adopté comme pôle conventionnel le CIP (Celestial Intermediate Pole, Pôle Céleste Intermédiaire, Résolution B1.7). Par définition, c'est l'axe de figure restreint à son mouvement de précession-nutation dont les termes ont des périodes supérieures à 2 jours (Capitaine 2002). Sa position dans le repère céleste est donnée par le modèle de précession-nutation adopté cette même année par l'UAI, le modèle IAU2000A. Notons qu'avant l'adoption du CIP, on se rapportait au CEP (Celestial Ephemeris Pole) qui définissait le pôle via le modèle de nutation IAU1980 et de précession IAU1976 (McCarthy 1996, Capitaine 2000). La position du CIP dans le repère terrestre est donnée par le vecteur complémentaire pour atteindre l'axe des pôles géographiques, constitué du mouvement du pôle, les termes de nutation de l'axe de figure dont la période est inférieure à 2 jours, et les effets diurnes et subdiurnes, bien modélisés et induits par les marées océaniques. On montre aisément que ce pôle intermédiaire reste très proche du véritable pôle instantané de rotation (différence de moins de 20 mas) et

bien qu'étant un concept géométrique, il permet de "compter" la rotation diurne et de l'extraire du reste des variations.

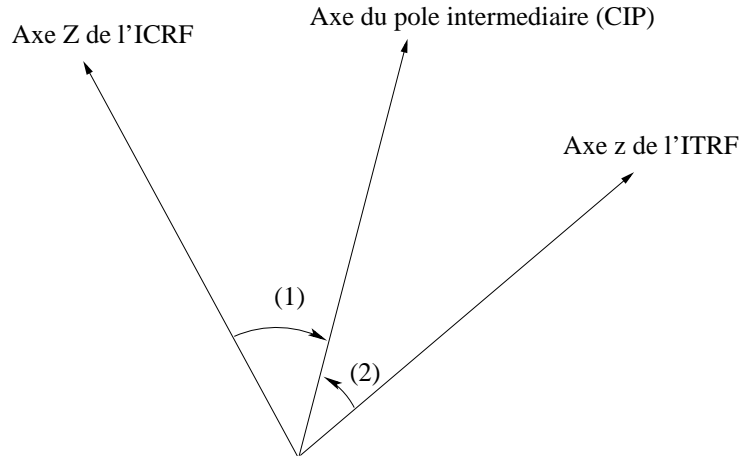


FIG. 1.6 – Représentation du CIP comme pôle intermédiaire entre le repère terrestre conventionnel (ITRF) et le repère céleste conventionnel (ICRF) : la transformation (1) désigne le modèle de précession-nutation IAU2000A adopté par l'UAI en 2000 ; la transformation (2) désigne le mouvement du pôle (périodes supérieures à 2 jours), les termes de nutation de l'axe de figure dont la période est inférieure à 2 jours dans l'espace et que l'on compte dans la Terre, ainsi que les termes diurnes et subdiurnes du mouvement du pôle induits par les marées océaniques.

1.2 La transformation classique entre repère terrestre et repère céleste

La transformation "classique" entre repère terrestre et repère céleste se réfère à l'équinoxe, intersection de l'équateur et de l'écliptique. Aussi, avant d'aller plus loin dans la discussion, il convient de définir les notions fondamentales liées à ces intermédiaires.

1.2.1 Nomenclature des plans et des angles fondamentaux

Ce paragraphe fait office de nomenclature et fixe les notations utilisées dans la suite.

- L'écliptique moyen de l'époque de référence est noté $E_c(0)$
- L'écliptique moyen de la date est noté $E_c(t)$
- L'équateur moyen de l'époque de référence est noté $E_q(0)$
- L'équateur moyen de la date est noté $E_q^m(t)$

- L'équateur vrai de la date est noté $E_q^v(t)$ et est défini comme plan perpendiculaire à l'axe du CIP.

Notons que l'équateur instantané de la Terre, i.e. le plan perpendiculaire à l'axe de rotation instantané est légèrement différent de $E_q^v(t)$ puisque le CIP et le pôle de rotation instantané diffèrent eux-mêmes de quelques millisecondes d'arc, ainsi que nous l'avons mentionné plus haut.

- L'équinoxe moyen de l'époque de référence, noté γ_0 , est le noeud descendant de $E_q(0)$ sur $E_c(0)$.

- L'équinoxe moyen de la date, noté γ_m , est le noeud descendant de $E_q^m(t)$ sur $E_c(t)$.

- L'équinoxe vrai de la date, noté γ_v , est le noeud descendant de $E_q^v(t)$ sur $E_c(t)$.

Nous avons également besoin des angles suivants (les orientations des angles sont très importantes puisqu'elles donnent le signe des rotations à utiliser dans la transformation de coordonnées) :

- ϵ_0 est l'obliquité moyenne à l'époque de référence, i.e. l'angle entre $E_q(0)$ et $E_c(0)$ compté depuis l'équateur vers l'écliptique dans le sens direct.

- ω_A est l'angle entre $E_q^m(t)$ et $E_c(0)$ compté depuis l'équateur vers l'écliptique dans le sens direct.

- ϵ_A est l'obliquité moyenne à la date, i.e. l'angle entre $E_q^m(t)$ et $E_c(t)$ compté depuis l'équateur vers l'écliptique dans le sens direct.

- ϵ_v est l'obliquité vraie à la date, i.e. l'angle entre $E_q^v(t)$ et $E_c(t)$ compté depuis l'équateur vers l'écliptique dans le sens direct.

- ψ_A est l'angle de précession lunisolaire, compté le long de $E_c(0)$ depuis le noeud de $E_q^m(t)$ jusqu'à celui de $E_q(0)$.

- χ_A est l'angle de précession dite "planétaire", correspondant à un déplacement du plan d'orbite de la Terre dû à l'attraction gravitationnelle des planètes. C'est le déplacement de l'écliptique $E_c(t)$ compté le long de $E_q^m(t)$ à partir de $E_c(0)$.

Dans les angles précédemment définis, l'indice A indique que les quantités indexées sont des quantités accumulées depuis l'époque de référence jusqu'à la date.

On peut définir les angles de nutation permettant de passer de l'équateur moyen de la date à l'équateur vrai :

- $\Delta\psi$ (nutation en longitude) est l'écart, compté le long de l'écliptique de la date $E_c(t)$, entre les équateurs $E_q^m(t)$ et $E_q^v(t)$ dans le sens γ_v vers γ_m .

• $\Delta\epsilon$ (nutation en obliquité) est l'angle entre l'équateur vrai de la date $E_q^v(t)$ et l'équateur moyen de la date $E_q^m(t)$, c'est à dire la différence $\epsilon_v - \epsilon_A$.

1.2.2 La transformation classique

Dans ce paragraphe, nous exposons la transformation qui mène du repère fixe terrestre, le TRF, au repère fixe céleste, le CRF. Cette transformation se compose d'un ensemble de rotations successives autour de différents axes. Matriciellement, les composantes d'un vecteur exprimées dans le TRF seront transformées dans le CRF via la matrice Q selon la relation :

$$[\text{CRF}] = Q [\text{TRF}] \quad (1.1)$$

avec Q comme produit de cinq matrices :

$$Q = C P N S W \quad (1.2)$$

La première matrice W permet de passer du repère terrestre au repère intermédiaire ou instantané (RI) dont le plan fondamental est l'équateur vrai de la date $E_q^v(t)$ (voir la figure 1.3). Les coordonnées du pôle intermédiaire, le CIP, dans le TRF, sont données par les quantités x_p, y_p comptées dans un repère direct. La matrice de rotation s'écrit :

$$W = R_1(y_p) R_2(x_p) \quad (1.3)$$

où :

$$R_2(x_p) = \begin{pmatrix} \cos x_p & 0 & -\sin x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin x_p & 0 & \cos x_p \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$R_1(y_p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & \sin y_p \\ 0 & -\sin y_p & \cos y_p \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Notons que cette formulation utilisant des coordonnées cartésiennes en guise d'angles est abusive. Toutefois, on peut montrer qu'on commet une erreur de l'ordre de 0.1 micro-seconde d'arc.

Ensuite, on doit rabattre l'axe x' du repère intermédiaire sur l'origine des ascensions droites sur l'équateur vrai de la date, l'équinoxe vrai γ_v . L'angle de rotation à appliquer n'est autre que l'opposé du temps sidéral à Greenwich (Greenwich Sidereal Time, ou GST) :

$$S = R_3(-\text{GST}) \quad (1.6)$$

où :

$$R_3(-\text{GST}) = \begin{pmatrix} \cos(-\text{GST}) & \sin(-\text{GST}) & 0 \\ -\sin(-\text{GST}) & \cos(-\text{GST}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Le temps sidéral à Greenwich est donné par :

$$\text{GST} = \text{GMST} + \alpha_E \quad (1.8)$$

GMST est le temps sidéral moyen de Greenwich et α_E est appelée équation des équinoxes. Cette quantité α_E peut être définie de deux façons. Géométriquement, c'est l'ascension droite de l'équinoxe moyen compté sur l'équateur vrai (ou encore différence entre l'ascension droite "moyenne" et l'ascension droite "vraie" d'un corps, voir la figure 1.7). On peut aussi définir l'équation des équinoxes de manière cinématique : la quantité α_E mesure la déviation de l'équinoxe, noeud ascendant de l'écliptique sur l'équateur, conséquence aux mouvements de l'axe de rotation de la Terre dans l'espace, c'est à dire aux variations du plan de l'équateur. L'expression complète de α_E est définie cinématiquement par Woolard (1953) entre une époque de référence t_0 et une date t :

$$\alpha_E = \Delta\psi \cos \epsilon_A - \frac{d\psi_A}{dt} \sin \epsilon_A \int_{t_0}^t \Delta\epsilon dt - \sin \epsilon_A \int_{t_0}^t \frac{d\Delta\psi}{dt} \Delta\epsilon dt \quad (1.9)$$

Les rotations suivantes ont pour but de passer du plan de l'équateur vrai de la date, ayant pour point origine l'équinoxe vrai γ_v , dans le plan de l'équateur moyen de la date, dont le point origine est l'équinoxe moyen γ_m . D'une part la différence d'ascension droite entre le point vernal vrai γ_v et le point vernal moyen γ_m comptée le long de l'écliptique moyen de la date est donnée par la nutation en longitude $\Delta\psi$. D'autre part l'angle entre le plan de l'équateur vrai de la date et le plan de l'équateur moyen de la date constitue la nutation en obliquité $\Delta\epsilon$ (voir la figure 1.8). La matrice de nutation s'écrit ainsi :

$$N = R_1(-\epsilon_A) R_3(\Delta\psi) R_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \quad (1.10)$$

Le passage du plan de l'équateur moyen de la date avec pour origine l'équinoxe moyen, au plan de l'équateur moyen de l'époque de référence avec pour origine l'équinoxe de l'époque γ_0 , est donné par la matrice de précession qui s'exprime au moyen des paramètres équatoriaux de Lieske (voir Lieske et al. 1977) explicités sur la figure 1.9 :

$$P = R_1(-\epsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A) \quad (1.11)$$

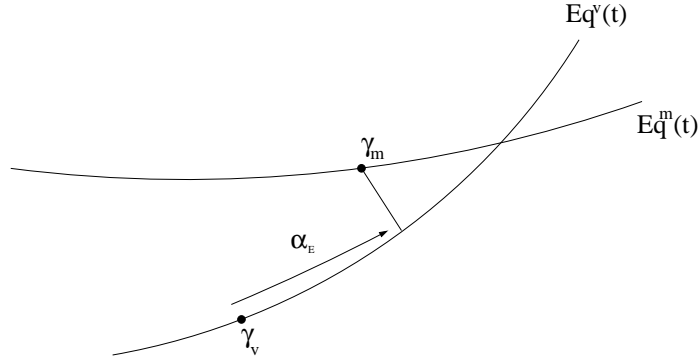


FIG. 1.7 – Equation des équinoxes : ascension droite de l'équinoxe moyen compté sur l'équateur vrai.

Les expressions adoptées conventionnellement par l'UAI sont celles du modèle de précession IAU1976, données dans l'article de Lieske et al. (1977) :

$$\begin{aligned}
 \psi_A &= 5038''7784 \times t - 1''07259 \times t^2 - 0''001147 \times t^3 \\
 \omega_A &= \epsilon_0 + 0''05127 \times t^2 - 0''007726 \times t^3 \\
 \epsilon_A &= \epsilon_0 - 46''8150 \times t - 0''00059 \times t^2 + 0''001813 \times t^3 \\
 \chi_A &= 10''5526 \times t - 2''38064 \times t^2 - 0''001125 \times t^3 \\
 \epsilon_0 &= 84381''448
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Jusqu'à l'adoption de l'ICRS en 1997, les modèles de précession-nutation étaient associés au repère céleste de référence. Ceci n'est plus vrai avec l'ICRS pour lequel il faut déterminer par l'observation l'écart entre le pôle moyen à J2000.0 donné par le modèle et le pôle de l'ICRS. Ceci amène à des petites corrections connues sous le nom d'écarts (offsets) à J2000.0. Ces corrections η_0 et ξ_0 permettent un basculement du plan de l'équateur moyen de l'époque sur le plan fondamental de l'ICRF, puis une rotation d'axe z et d'angle $d\alpha_0$ permet de caler l'axe x sur l'origine de l'ICRF :

$$C = R_3(d\alpha_0) R_2(-\xi_0) R_1(\eta_0) \tag{1.13}$$

Les valeurs des décalages sont (Capitaine et al. 2003) :

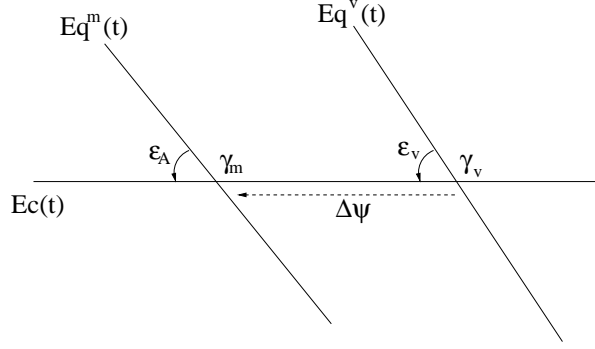


FIG. 1.8 – Angles de nutation en longitude et en obliquité : $\Delta\psi = \gamma_m - \gamma_v$ et $\Delta\epsilon = \epsilon_v - \epsilon_A$.

$$\begin{aligned}\xi_0 &= -0''016617 \\ \eta_0 &= -0''006819\end{aligned}\tag{1.14}$$

Le décalage $d\alpha_0$ en ascension droite entre l'origine du GCRS et l'équinoxe moyen de l'époque a été réévaluée par une analyse simultanée des données VLBI et LLR (Chapront et al. 2002). Ainsi, l'ascension droite de l'équinoxe moyen J2000.0 dans le GCRS est :

$$d\alpha_0 = -0''0146\tag{1.15}$$

En combinant toutes les rotations que l'on vient d'énumérer, on obtient la transformation complète entre CRF et TRF :

$$\begin{aligned}[\text{CRF}] &= C P N S W [\text{TRF}] \\ &= R_3(d\alpha_0) R_2(-\xi_0) R_1(\eta_0) \\ &\quad R_1(-\epsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A) \\ &\quad R_1(-\epsilon_A) R_3(\Delta\psi) R_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \\ &\quad R_3(-\text{GST}) \\ &\quad R_1(y_p) R_2(x_p) [\text{TRF}]\end{aligned}\tag{1.16}$$

La figure 1.10 résume tous les plans fondamentaux ainsi que les transformations entre repère intermédiaire et repère céleste.

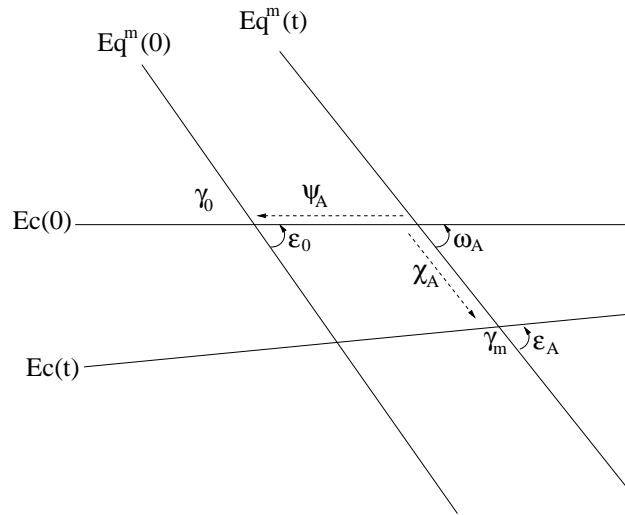


FIG. 1.9 – Les paramètres équatoriaux de Lieske permettant le passage de l'écliptique moyen de la date au repère céleste.

1.2.3 Imperfections de la transformation classique

La transformation classique que nous venons de décrire possède plusieurs imperfections qu'il faut soulever. Tout d'abord, elle sépare artificiellement la précession et la nutation alors qu'elles sont au départ issues d'un même phénomène physique : l'action du couple externe gravitationnel sur la forme de la Terre. Cette séparation entre précession et nutation conduit à passer par un plan intermédiaire, l'équateur moyen de la date, qui ne présente aucune réalité physique. Ce plan est seulement un intermédiaire théorique classique. Il est défini par une théorie de la précession et n'a pas de prise directe avec l'observation de l'orientation spatiale de la Terre, à fortiori indépendante de l'inclinaison de l'équateur moyen de la date. De plus, les théories classiques utilisent un grand nombre de paramètres alors qu'en principe deux paramètres seulement suffiraient pour positionner le CIP dans l'espace (comme on le fait pour le CIP dans le repère terrestre).

L'autre imperfection de la transformation classique réside dans l'utilisation de l'équation des équinoxes. On prend l'équinoxe comme origine sur l'équateur vrai de la date. C'est le noeud ascendant de l'écliptique de la date (défini par la révolution de la Terre autour du Soleil) sur l'équateur vrai de la date (défini par la rotation de la Terre sur elle-même). On a vu que cet équateur instantané, perpendiculaire à l'axe du CIP, est animé du mouvement de précession-nutation (dans le repère céleste) et du mouvement du pôle (dans le repère terrestre). La direction de l'équinoxe sur l'équateur instantané subit donc un mouvement séculaire (induit par la précession) et un mouvement périodique (induit par la nutation). Ce point origine n'est donc pas fixe sur l'écliptique, et son déplacement complexe nécessite une modélisation la plus exacte possible. De plus le déplacement de l'équinoxe est prise en compte premièrement dans le modèle de précession-nutation et deuxièmement dans GST. Le modèle doit être le même dans les deux cas ce qui introduit une difficulté supplémentaire lorsqu'on veut que la précision approche la microseconde

d'arc.

1.2.4 Détermination de l'orientation de la Terre et données disponibles

Ayant défini les divers paramètres d'orientation de la Terre, nous présentons brièvement et de manière très schématique dans ce paragraphe, comment on extrait ces paramètres des observations de la géodésie spatiale.

Techniques

Les diverses techniques utilisent le même principe général : comparer un modèle à des observations. Le modèle calculé C est sensé être proche de la réalité et dépend d'un certain nombre de paramètres a_j . La différence entre les observations O_i et le modèle C_i pour les mêmes instants est une fonction des paramètres.

$$(O - C)_i = f_i(a_j) \quad (1.17)$$

Si le modèle décrit "bien" les observations, on peut linéariser les $O - C$ et donc les fonctions f . On obtient les équations d'observation sous la forme :

$$\Delta(O - C)_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_j} \right) \Delta a_j \quad (1.18)$$

équation dans laquelle on exprime les écarts au modèle $\Delta(O - C)$ en fonction des paramètres de ce modèle. Le système formé par les équations d'observation est ensuite résolu. La méthode la plus basique est une résolution au sens des moindres carrés.

Chaque technique rend un type d'observable différent (voir le tableau ci-dessous) et permet de déterminer des paramètres différents (pour les EOP, voir le tableau ci-après), dont un certain nombre de paramètres instrumentaux.

Réalisation du CIP par le VLBI

La technique principale pour déterminer l'orientation de la Terre est l'interférométrie radio à très longue base (Very Long Baseline radio Interferometry, ou VLBI). Dans cette technique, deux antennes (au minimum) radio séparées par une base intercontinentale (typiquement 6000 km), observent la même radiosource extragalactique dans des longueurs d'onde centimétriques (13 cm et 3.6 cm). On mesure alors le retard entre la réception du signal radio sur chacune des deux antennes. Ce retard est principalement "géométrique" (voir la figure 1.11) et donc dû à l'orientation de la Terre dans l'espace. Les stations d'observation, et donc la ligne de base, sont positionnées dans le TRF. Les positions des radiosources sont connues dans le CRF. On déduit donc du retard l'orientation de la ligne de base dans le CRF et à fortiori l'orientation relative du TRF par rapport au CRF, c'est

TAB. 1.1 – Les différents types de quantités observées suivant la technique utilisée.

Technique	quantité observée
VLBI	Ecart entre les temps d'arrivée sur deux antennes du signal radio émis par un quasar
GPS	Différence de phase entre l'horloge du satellite et celle du récepteur
DORIS	Décalage Doppler entre le satellite et la station
Laser-Satellite (SLR)	Temps aller-retour d'une impulsion laser entre la station et le satellite
Laser-Lune (LLR)	Temps aller-retour d'une impulsion laser entre la station et la Lune
Astrolabe	Instant de passage d'une étoile à une distance zénithale de valeur connue
Méridienne	Instant de passage d'une étoile au méridien

TAB. 1.2 – Les différents paramètres d'orientation terrestre déterminés par chaque technique (le chiffre 1 indique que le paramètre est déterminé par la technique). Notons toutefois que la détermination du LOD par le GPS et le SLR nécessite une contrainte donnée par le VLBI et que le LLR est sensible aux paramètres $\Delta\psi$ et $\Delta\epsilon$.

Technique	x_p	y_p	\dot{x}_p	\dot{y}_p	$UT1 - UTC$	LOD	$\Delta\psi$	$\Delta\epsilon$
VLBI	1	1	-	-	1	-	1	1
GPS	1	1	1	1	-	1	-	-
DORIS	1	1	-	-	-	-	-	-
SLR	1	1	-	-	-	1	-	-

à dire la matrice instantanée de transformation entre TRF et CRF. Cette matrice dépend des paramètres d'orientation de la Terre (Earth Orientation Parameters, ou EOP) : les coordonnées du pôle dans le TRF, l'angle de rotation de la Terre et les coordonnées du pôle dans le CRF. Pour déterminer ces paramètres, il faut les estimer sur un certain nombre d'observations. Une détermination précise de chacun de ces paramètres nécessite qu'on les estime dans des bandes de fréquence distinctes. Une différence fondamentale entre ces paramètres réside dans le fait que les coordonnées du pôle dans le CRF (précession-nutation) varient dans l'espace alors que les coordonnées du pôle dans le TRF (mouvement du pôle) varient dans la Terre. Or, la Terre tourne à la vitesse Ω , soit 1 cycle par jour (cpj) dans l'espace. Une fréquence σ dans la Terre vaut donc, dans l'espace :

$$\sigma' = \sigma + \Omega \quad (1.19)$$

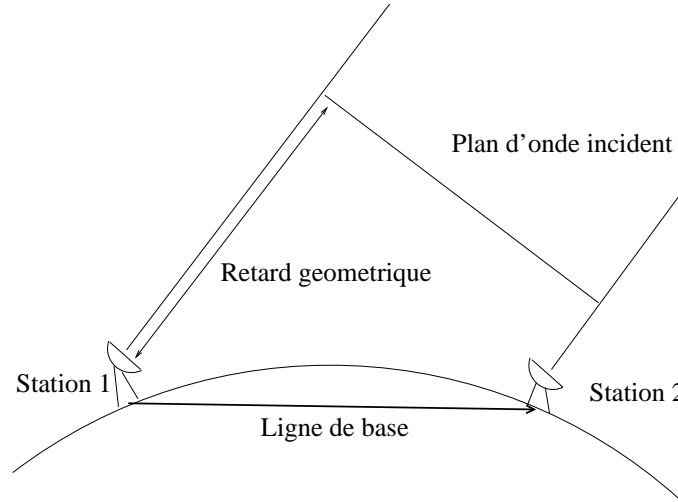


FIG. 1.11 – Principe simplifié de la technique VLBI.

Les observations VLBI "courantes" se font environ deux fois par semaine. On estime un "point" (un ensemble de paramètres dont les coordonnées du pôle dans le TRF et le CRF ainsi que la quantité UT1-UTC) par session. Ceci revient à considérer que les paramètres ont des variations de périodes supérieures à quelques jours, typiquement deux jours. C'est à dire des variations comprises dans la bande de fréquence $[-0.5, +0.5]$ cycle par jour. Or la bande de fréquence $[-0.5, +0.5]$ cpj dans le TRF correspond à la bande $[+0.5, +1.5]$ cpj dans le CRF. Ces deux bandes sont donc disjointes. Ainsi, dans le cas d'observations VLBI courantes, on peut déterminer à la fois les coordonnées du pôle dans le CRF et les coordonnées du pôle dans le TRF puisque leurs bandes de fréquence (exprimées dans le même repère) ne se chevauchent pas.

Ce n'est plus le cas lors de sessions VLBI intensives au cours desquelles on estime

des paramètres sur des temps beaucoup plus courts comme la demi-heure. Dans des observations de ce type, on s'attend à une résolution temporelle de l'ordre de l'heure. On est typiquement dans la bande de fréquence $]-\infty, -0.5] \cup [+0.5, +\infty[$ cpj. Or, la bande $]-\infty, -0.5] \cup [+0.5, +\infty[$ cpj dans le TRF devient $]-\infty, -1.5] \cup [-0.5, +\infty[$ cpj dans le CRF et chevauche la bande dans laquelle on détermine les coordonnées du pôle dans le CRF. Il devient donc impossible de déterminer simultanément la précession-nutation et le mouvement du pôle. Dans le cas de déterminations horaires, on fixe par exemple les paramètres de précession-nutation, les variations diurnes et subdiurnes de ceux-ci se reporteront de manière indépendante comme des variations dans le mouvement du pôle (on respecte ainsi la définition du CIP qui ne comprend que les termes de périodes supérieures à deux jours dans l'espace).

Ainsi, la position du CIP dans le TRF et dans le CRF ne peut être déterminée que pour des périodes excédant 2 jours. Le pôle ainsi défini par l'observation n'est donc pas exactement l'axe de rotation instantané de la Terre mais une sorte de moyenne diurne.

Le Service International de la Rotation Terrestre

Le Service International de la Rotation Terrestre (International Earth Rotation Service, IERS) fut créé en 1987 par l'Union Astronomique Internationale et l'Union Internationale de Géodésie et Géophysique (UGGI). Il fait suite au Bureau International de l'Heure (BIH) et d'autres services internationaux qui depuis 1899 avaient en charge la détermination mondiale des paramètres d'orientation de la Terre. Les divers bureaux de l'IERS se partagent les tâches pour assurer la maintenance et la réalisation du référentiel céleste (ICRS Product Center), du référentiel terrestre (ITRS Product Center), de produire régulièrement les paramètres d'orientation de la Terre en vue d'études géophysiques ou pour effectuer la transformation entre ICRF et ITRF (Earth Orientation Parameters Product Center à l'Observatoire de Paris, Rapid Prediction Service à l'U.S. Naval Observatory), de produire régulièrement des données géophysiques : moment cinétique atmosphérique (Special Bureau for Atmosphere), moment cinétique océanique (Special Bureau for Ocean), moment cinétique hydrologique (Special Bureau for Hydrology), couplage noyau-manteau (Special Bureau for the Core), ou encore marées océaniques, charge ou coefficients du champ de gravité.

Parmi ses diverses missions, l'IERS collecte à l'échelle internationale l'ensemble des séries temporelles d'EOP produites par les différentes techniques. Le service produit alors une série combinée multitechnique, la combinaison visant à mettre en valeur les avantages de chaque technique (par exemple l'échantillonnage plus dense du GPS par rapport au VLBI). Cette série combinée, échantillonnée à un point par jour (0h UTC), démarrant le 1er janvier 1962, est connue sous le nom de série IERS C04 et constitue la série de référence internationale.

1.3 La nouvelle transformation basée sur l’Origine Non-Tournante

L’Origine Non-Tournante (NRO, Non-Rotating Origin⁴) a été introduite par Bernard Guinot (1979), dans le but de séparer clairement ce qui est dû aux mouvement de l’axe de rotation et ce qui est dû à la rotation autour de cet axe, et de permettre une définition exacte de UT1.

1.3.1 Le point origine et la condition de non-rotation

Comme ce point origine va constituer un point de départ pour compter l’angle de rotation de la Terre sur elle-même, il est indispensable qu’il ne tourne pas lorsque le CIP subit la précession-nutation ou le mouvement du pôle. On va donc choisir une origine (ou ”departure point”) sur l’équateur instantané qui vérifie la condition de non-rotation suivante :

Le point origine sur l’équateur instantané ne doit pas subir de rotation instantanée autour de l’axe du CIP lorsque celui-ci se déplace dans le repère fixe.

Mathématiquement, la condition de non-rotation s’écrit :

$$\vec{\Omega} \cdot \hat{n} = 0 \quad (1.20)$$

où $\vec{\Omega}$ est le vecteur de rotation infinitésimale qui permet de passer du repère intermédiaire au temps t à ce même repère au temps $t + dt$, et \hat{n} est un vecteur unitaire porté par l’axe du CIP. Cette relation exprime simplement le fait que la rotation du repère engendrée par les mouvement du CIP n’a aucune composante sur l’axe du CIP.

1.3.2 Des nouveaux paramètres

De façon générale, la transformation entre repère terrestre et repère céleste nécessite 5 paramètres, déjà énoncés plus haut :

- deux paramètres pour donner la trajectoire du CIP dans le TRF,
- un paramètre pour définir la rotation de la Terre autour de son axe,
- deux paramètres pour donner la trajectoire du CIP dans le CRF.

La transformation classique utilise bien 2 paramètres pour la trajectoire du CIP dans le TRF, ce sont les coordonnées terrestres du pôle : x_p et y_p . En revanche, pour donner la trajectoire du CIP dans le CRF, un grand nombre de paramètres est utilisé : $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$,

⁴L’Origine Non-Tournante est une extension du concept de ”departure point” introduit par Newcomb (1895) et qui est couramment utilisé en mécanique céleste et géodésie spatiale.

ϵ_A , χ_A , ω_A , ψ_A et ϵ_0 . L'utilisation de la transformation basée sur la NRO peut avantageusement être associée à l'utilisation de nouvelles coordonnées célestes du pôle X et Y , réunissant la précession et la nutation et réduisant ainsi le nombre de paramètres à 2.

La figure 1.12 montre le CIP dans le repère céleste paramétré par deux angles E et d . Les coordonnées du CIP dans le repère céleste sont alors :

$$\begin{aligned} X &= \sin d \cos E \\ Y &= \sin d \sin E \\ Z &= \cos d \end{aligned} \tag{1.21}$$

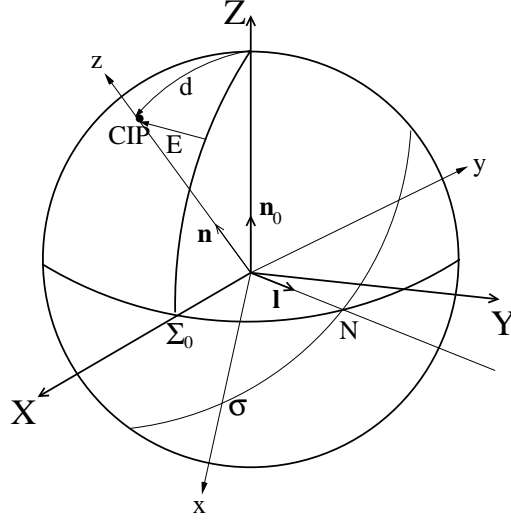


FIG. 1.12 – Coordonnées du CIP dans l'espace et point origine sur l'équateur instantané.

1.3.3 Déplacement du point origine, quantités s et s'

Sur la figure 1.12, nous avons noté σ le point origine sur l'équateur instantané. Nous avons besoin de savoir comment se déplace ce point lorsque le CIP bouge, soit lorsque les angles E et d (ou bien les coordonnées X , Y et Z) varient. Introduisons une quantité s comme étant la distance entre le point origine et l'origine des longitudes sur l'équateur conventionnel (voir la figure 1.13) :

$$s = \sigma N - \Sigma_0 N \tag{1.22}$$

Lorsqu'on va passer du repère fixe au repère du CIP, on devra effectuer trois rotations successives :

- 1 - Une rotation $R_3(90^\circ + E)$ autour de \hat{n}_0 .
- 2 - Une rotation $R_2(d)$ autour de \hat{l} .
- 3 - Enfin, une rotation $R_3(-(E + s))$ autour de \hat{n} .

Le vecteur de rotation résultant $\vec{\Omega}$ s'écrit (Capitaine et al. 1986) :

$$\vec{\Omega} = \dot{E}\hat{n}_0 - (\dot{E} + \dot{s})\hat{n} + \dot{d}\hat{l} \quad (1.23)$$

En écrivant la condition de non-rotation (1.20), il vient :

$$\dot{E} \cos d - \dot{E} - \dot{s} = 0 \quad (1.24)$$

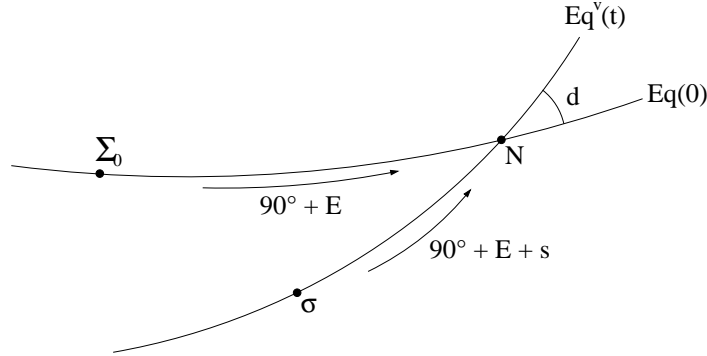


FIG. 1.13 – Quantité s .

C'est une relation entre le déplacement du point origine (quantité \dot{s}) et les coordonnées du CIP dans le repère fixe.

On peut réaliser ce point origine dans le repère céleste ou dans le repère terrestre. Dans le cas du CRF, le point origine est nommé CEO (Celestial Ephemeris Origin), on le note σ , et on note s son déplacement le long de l'équateur. Dans le cas du TRF, le point origine est nommé TEO (Terrestrial Ephemeris Origin), on le note ϖ , et on note s' son déplacement. Aux angles E et d dans le CRF correspondent respectivement les

angles F et g dans le TRF. Quant aux coordonnées du CIP, qui s'écrivent X et Y dans l'espace (Celestial Pole Coordinates), on les notera u et v dans la Terre. Notons que ces coordonnées terrestres du CIP sont surtout connues comme x_p et y_p , mais sont alors comptées dans un repère indirect, alors que u et v sont comptées dans le repère direct (soit $u = x_p$ et $v = -y_p$). Les déplacements des CEO et TEO entre l'époque et la date sont alors donnés par les intégrales :

$$s = \int_{t_0}^t \dot{E}(\cos d - 1)dt \quad (1.25)$$

et :

$$s' = \int_{t_0}^t \dot{F}(\cos g - 1)dt \quad (1.26)$$

La convention est de prendre ces quantités nulles à l'époque t_0 . Dans le cas de la CEO, cette convention s'écrit :

$$\sigma_0 N_0 = \Sigma_0 N_0 \quad (1.27)$$

Elle est similaire pour la TEO :

$$\varpi_0 M_0 = \Pi_0 M_0 \quad (1.28)$$

Les quantités s et s' s'expriment aussi au moyen des coordonnées du pôle :

$$s = \int_{t_0}^t \frac{\dot{X}Y - X\dot{Y}}{1 + Z}dt \quad (1.29)$$

et :

$$s' = \int_{t_0}^t \frac{\dot{u}v - u\dot{v}}{2}dt \quad (1.30)$$

1.3.4 La transformation

La transformation entre repère céleste et repère terrestre basée sur la nouvelle représentation est largement présentée et développée dans les articles suivants : Capitaine et al. 1986, Souhay 1988, Capitaine 1990 et Capitaine et al. 2000.

Le passage du TRF au repère intermédiaire "terrestre" se fait en deux étapes :

1 - Basculement de l'axe du repère fixe sur l'axe du CIP (deux rotations). Ce basculement utilise, comme dans la transformation classique, les coordonnées terrestres du pôle (voir la relation (1.3)).

2 - Positionnement de l'axe x sur le point origine ϖ (une rotation). Après les deux rotations précédentes, l'axe x est sur l'équateur instantané. On doit lui appliquer une rotation d'axe z dont l'angle n'est autre que la quantité $-s'$.

Matriciellement, on aura :

$$[\text{CRF}] = Q [\text{TRF}] \quad (1.31)$$

avec Q comme produit de trois matrices :

$$Q = P N A P M \quad (1.32)$$

Entre le repère terrestre et le repère intermédiaire, on utilisera la matrice de mouvement du pôle :

$$P M = R_3(-s') R_1(y_p) R_2(x_p) \quad (1.33)$$

Notons que cette rotation $R_3(-s')$ devrait en toute rigueur être présente dans la transformation classique juste avant d'appliquer l'équation des équinoxes. En effet, celle-ci ne prend en compte que les déplacements de l'origine des ascensions droites sur l'équateur vrai dûs à la précession-nutation. En revanche, l'origine terrestre des longitudes subit elle aussi un déplacement dû au mouvement du pôle qu'on omettait de considérer jusqu'à présent.

On doit ensuite bouger l'axe x du repère depuis le point origine dans la Terre ϖ (TEO) jusqu'au point origine dans l'espace σ (CEO), c'est à dire passer d'un repère intermédiaire dont l'origine est terrestre à un repère intermédiaire dont l'origine est céleste. C'est par une rotation dans le plan de l'équateur instantané dont l'angle est nommé angle stellaire ou angle de rotation de la Terre (en anglais Stellar Angle ou Earth Rotation Angle) θ , compté depuis la CEO vers la TEO :

$$A = R_3(-\theta) \quad (1.34)$$

L'axe x est maintenant dirigé vers la CEO σ . Le passage dans le CRF utilise les coordonnées célestes angulaires du pôle et la quantité s comme pour la matrice de mouvement du pôle (voir la relation (1.33)) :

$$P N = R_3(-E) R_2(-d) R_3(E) R_3(s) \quad (1.35)$$

L'ensemble des rotations s'écrit :

$$\begin{aligned}
[\text{CRF}] &= PN A PM [\text{TRF}] \\
&= R_3(-E) R_2(-d) R_3(E) R_3(s) \\
&\quad R_3(-\theta) \\
&\quad R_3(-s') R_1(y_p) R_2(x_p) [\text{TRF}]
\end{aligned} \tag{1.36}$$

La matrice PN s'exprime aussi en fonction des coordonnées X et Y du CIP dans le repère céleste. Utilisant la relation (1.21), il vient :

$$PN = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} R_3(s) \tag{1.37}$$

avec $a = 1/(1 + Z)$ et $Z = \sqrt{1 - (X^2 + Y^2)}$.

1.3.5 Relation entre les X , Y et les $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$

Nous rappelons dans ce paragraphe les formules de transformation entre les quantités $\Delta\psi$ et $\Delta\epsilon$ rapportées à l'écliptique de la date et les quantités X et Y , considérons le triangle sphérique $N\gamma_1\gamma_0$ sur la figure 1.14. Dans cette représentation, le plan de référence est l'équateur de l'époque et non l'équateur conventionnel de l'ICRF. Les coordonnées du CIP dans le repère équatorial de l'époque sont notées \bar{X} et \bar{Y} .

Les relations de définition des quantités \bar{X} et \bar{Y} sont identiques à celles exposées en (1.21) :

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \sin \bar{d} \cos \bar{E} \\
\bar{Y} &= \sin \bar{d} \sin \bar{E}
\end{aligned} \tag{1.38}$$

On déduit au moyen des relations dans le triangle sphérique les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \sin(\psi_A + \Delta\psi_1) \\
\bar{Y} &= -\sin \epsilon_0 \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \\
&\quad + \cos \epsilon_0 \sin(\omega_A + \Delta\epsilon_1) \cos(\psi_A + \Delta\psi_1)
\end{aligned} \tag{1.39}$$

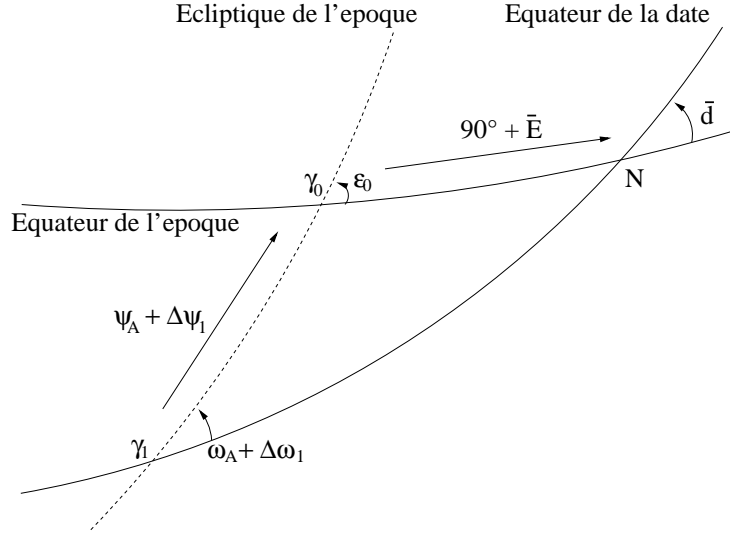


FIG. 1.14 – Relations entre les angles d et E et les paramètres de la précession-nutation.

Les $\Delta\psi_1$ et $\Delta\epsilon_1$ étant les angles de nutation rapportés à l'écliptique de l'époque (voir la figure 1.10).

Pour établir les relations entre $\Delta\psi_1$, $\Delta\epsilon_1$ et $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$, il suffit d'écrire la matrice de précession-nutation PN telle qu'on la trouve avec les équations (1.10) et (1.11) :

$$PN = R_1(-\epsilon_0) R_3(\psi_A) R_1(\omega_A) R_3(-\chi_A) R_1(-\epsilon_A) R_3(\Delta\psi) R_1(\epsilon_A + \Delta\epsilon) \quad (1.40)$$

et de remarquer que cette même matrice peut aussi s'écrire :

$$PN = R_1(-\epsilon_0) R_3(\psi_A + \Delta\psi_1) R_1(\omega_A + \Delta\epsilon_1) R_3(-\chi_A - \Delta\chi_A) \quad (1.41)$$

En identifiant les deux matrices et en se limitant aux termes donnant une contribution plus grande que la microseconde d'arc sur un siècle, on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta\psi_1 &= \frac{\Delta\psi \sin \epsilon_A \cos \chi_A - \Delta\epsilon \sin \chi_A}{\sin \omega_A} \\ \Delta\epsilon_1 &= \Delta\psi \sin \epsilon_A \sin \chi_A + \Delta\epsilon \cos \chi_A \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ces formules sont données par exemple par Aoki et Kinoshita (1983). Notons qu'un terme est omis dans cet article et sans ce terme, la formule (1.42) ci-dessus ne serait plus exacte à la précision voulue.

Pour se rapporter à l'équateur conventionnel de l'ICRF, on doit encore prendre en compte les écarts entre le repère équatorial moyen de l'époque et l'ICRF (Capitaine 1990) :

$$\begin{aligned} X &= \bar{X} + \xi_0 - d\alpha_0 \bar{Y} \\ Y &= \bar{Y} + \eta_0 + d\alpha_0 \bar{X} \end{aligned} \tag{1.43}$$

1.4 Les modèles de précession-nutation

1.4.1 Le modèle IAU1980

En 1980, l'UAI a adopté un modèle de précession-nutation basé sur les formules de précession de Lieske (Lieske et al. 1977) et sur le modèle de nutation 1980 (Seidelmann 1982). Ce modèle de nutation est basé sur la théorie de la rotation de la Terre rigide de Kinoshita (1977). Cette nutation est calculée pour une terre rigide subissant exclusivement le couple lunisolaire. Elle ne contient donc aucun terme planétaire. Wahr (1981) a développé les formules de transformation (appelées fonction de transfert) entre amplitudes relatives à un modèle de Terre rigide et un modèle de Terre non-rigide incluant un noyau liquide.

Le modèle de nutation IAU1980 contient 106 termes s'exprimant sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{i=1}^{106} (A_i + A'_i \times t) \sin(\text{ARG}) \\ \Delta\epsilon &= \sum_{i=1}^{106} (B_i + B'_i \times t) \cos(\text{ARG}) \end{aligned} \tag{1.44}$$

Dans ces expressions et dans celles qui suivront, ARG désigne une combinaison entière des 14 arguments (les arguments lunisulaires de Delaunay, les arguments planétaires et le cumul de précession, voir l'Annexe A pour le détail de ces arguments). Il n'y a pas d'arguments planétaires dans le cas du modèle IAU1980. Les angles de nutation $\Delta\psi$ et $\Delta\epsilon$ sont rapportés au repère de la date.

1.4.2 Le modèle IAU2000

Les observations VLBI effectuées depuis les années 1980 ont montré des différences significatives entre le modèle IAU1980 et les valeurs observées. Une théorie plus élaborée de la rotation d'une Terre rigide a été développée par Souchay et Kinoshita (1997), prenant en compte de nombreux effets au second ordre, notamment les effets planétaires et un niveau de troncature de 0.5 microseconde d'arc. Mathews, Herring et Buffet (2002) ont construit une nouvelle fonction de transfert incluant l'anelasticité du manteau, les effets des marées océaniques, les couplages électromagnétiques entre noyau et manteau, les effets annuels atmosphériques et la nutation géodésique. La fonction de transfert s'exprime

analytiquement au moyen de quelques paramètres de base (BEP, Basic Earth Parameters) que l'on estime à partir des observations VLBI. Les séries de nutation MHB2000 sont ainsi produites. Conjointement aux séries de nutation, Herring et al. (2002) donne une correction aux valeurs de la précession IAU1976 :

$$\begin{aligned}\delta\psi_A &= -0''29965 \times t \\ \delta\omega_A &= -0''02524 \times t\end{aligned}\tag{1.45}$$

La précession compatible avec IAU2000 est alors :

$$\begin{aligned}\psi_A &= 5038''47875 \times t - 1''07259 \times t^2 - 0''001147 \times t^3 \\ \omega_A &= \epsilon_0 - 0''02524 \times t + 0''05127 \times t^2 - 0''007726 \times t^3 \\ \epsilon_A &= \epsilon_0 - 46''8150 \times t - 0''00059 \times t^2 + 0''001813 \times t^3 \\ \chi_A &= 10''5526 \times t - 2''38064 \times t^2 - 0''001125 \times t^3 \\ \epsilon_0 &= 84381''448\end{aligned}\tag{1.46}$$

Le modèle de précession-nutation IAU2000 adopté par l'UAI en août 2000 à Manchester, comprend les séries de nutation MHB2000 et la précession IAU1976 corrigée. Le modèle existe en deux versions. Une version IAU2000A contient les termes dont l'amplitude est supérieure à 1 microseconde d'arc, soit 678 termes lunisolaires et 687 termes planétaires (et donc un total de 1365 termes) et garantit une précision de 0.2 mas (en fait, on est limité ici par la précision des observations VLBI). L'autre version, IAU2000B (McCarthy et Luzum 2003), est précise à 1 mas et contient seulement 80 termes lunisolaires ainsi qu'un biais incluant la contribution des termes planétaires.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le modèle IAU2000A décrit le mouvement du CIP dans le repère céleste. Les angles de nutation rapportés au repère de la date s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= \sum_i A_{s,i} \sin(\text{ARG}) + A_{c,i} \cos(\text{ARG}) \\ &+ A'_{s,i} \times t \times \sin(\text{ARG}) + A'_{c,i} \times t \times \cos(\text{ARG}) \\ \Delta\epsilon &= \sum_i B_{s,i} \sin(\text{ARG}) + B_{c,i} \cos(\text{ARG}) \\ &+ B'_{s,i} \times t \times \sin(\text{ARG}) + B'_{c,i} \times t \times \cos(\text{ARG})\end{aligned}\tag{1.47}$$

Ci-après, un extrait des tables de nutation MHB2000, les amplitudes sont données en microsecondes d'arc. On donne ici les 20 premiers termes classés par amplitudes du terme $A_{s,i}$ décroissantes pour $\Delta\psi$ et par amplitudes du terme $B_{c,i}$ décroissantes pour $\Delta\epsilon$.

TAB. 1.3 – Les 20 premiers termes de la nutation en longitude $\Delta\psi$ MHB2000 en micro-secondes d’arc.

$A_{s,i}$	$A_{c,i}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-17206416.10	3338.60	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1317090.60	-1369.60	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-227641.70	279.60	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
207455.40	-69.80	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
147587.70	1181.70	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71115.90	-87.20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-51682.10	-52.40	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-38730.20	38.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-30146.40	81.60	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-21582.90	11.10	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15699.80	-16.80	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12822.70	18.10	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-12345.70	1.90	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6337.90	-15.00	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6311.00	2.70	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5964.50	14.90	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5797.60	-18.90	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5161.30	12.90	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4772.20	-1.80	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4589.30	3.10	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$A'_{s,i}$	$A'_{c,i}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-17466.60	2.90	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-363.30	-1.50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-167.50	1.20	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
122.60	0.20	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
49.40	0.00	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-36.70	0.10	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-23.40	0.20	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20.70	0.00	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13.70	0.00	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8.50	0.00	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.30	0.00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.20	0.00	0	2	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.30	0.00	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.30	0.00	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5.00	0.00	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4.20	0.00	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3.60	0.00	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.50	0.00	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.10	0.00	1	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.10	0.00	0	1	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 1.4 – Les 20 premiers termes de la nutation en obliquité $\Delta\epsilon$ MHB2000 en microsecondes d'arc.

$B_{s,i}$	$B_{c,i}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
1537.70	9205233.10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-458.70	573033.60	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
137.40	97846.10	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-29.10	-89749.20	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.40	22438.60	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31.80	20073.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36.70	12902.60	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-13.20	-9592.90	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-192.40	7387.10	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.90	-6898.20	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40	-5331.10	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.90	-3322.80	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.50	3142.90	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.80	2636.60	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6.60	2554.50	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.00	-2423.60	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.80	1645.00	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1387.00	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.90	1323.80	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.30	-1233.80	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$B'_{s,i}$	$B'_{c,i}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
0.20	908.60	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.30	-301.50	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-67.70	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.10	-48.50	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	47.00	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.10	29.90	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.50	-18.40	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-6.30	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-4.20	0	2	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	3.20	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	1.80	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.10	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.10	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.10	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.00	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	1.00	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.90	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.20	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.10	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1.5 Modélisation pour la nouvelle transformation

Les développements des coordonnées célestes du pôle X , Y et de la quantité s en fonction du temps à partir du modèle IAU1980 sont donnés par Capitaine (1990) avec une cohérence de 50 microsecondes d'arc sur un siècle. De nouveaux développements ont été calculés lors de l'adoption du modèle de nutation IERS1996 (McCarthy 1996) (incluant des termes planétaires) et des corrections à la précession (McCarthy 1996). Ces dernières séries sont présentées dans l'article de Capitaine, Guinot et McCarthy (2000). Nous exposons dans la suite du Chapitre le calcul de X , Y et s associés au modèle de précession-nutation IAU2000A⁵. Suivra en toute fin du Chapitre l'étude pour la modélisation de la quantité s' associée au mouvement du pôle (Lambert et Bizouard 2002).

1.5.1 Les coordonnées célestes du pôle

Le calcul des quantités X , Y et s fait intervenir les séries de Poisson de la nutation (séries de Fourier dont les coefficients dépendent polynômialement du temps) ainsi que les polynômes de la précession. La procédure de calcul de X , Y et s demande plusieurs opérations de type addition, produit, dérivation, intégration, développement en séries de Taylor pour évaluer les sinus et cosinus, réordonnance des termes selon les arguments ou selon leur amplitude, chacune de ces opérations étant appliquée à des séries longues (plus de 1000 termes). Pour faire ces manipulations très lourdes, nous avons utilisé un logiciel déjà existant, GREGOIRE, en apportant nos propres améliorations pour mieux l'adapter à notre requête⁶. Le logiciel permet de fixer le niveau de troncature des séries. Nous avons choisi de ne garder que les termes ayant une contribution supérieure à 1 microseconde d'arc sur deux siècles.

La procédure de calcul pour les X , Y est la suivante :

1 - Convertir les $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ de la série de nutation MHB2000 en $\Delta\psi_1$, $\Delta\epsilon_1$. Pour ce faire, on utilise la relation (1.42) ainsi que les valeurs de la précession IAU2000 (1.46).

2 - On calcule les développements en séries de \bar{X} , \bar{Y} avec les relations (1.39) et les valeurs de (1.46).

3 - On calcule les développements en séries de X , Y au moyen des relations (1.43) et des valeurs de (1.14) et (1.15).

Les expressions finales de X et Y ont la forme suivante, en microarcsecondes :

$$\begin{aligned} X = & -16616.99 + 2004191742.88 \times t - 427219.05 \times t^2 - 198620.54 \times t^3 \\ & - 46.05 \times t^4 + 5.98 \times t^5 \\ & + \sum_{i,j} t^j \times [(a_{s,j})_i \sin(\text{ARG}) + (a_{c,j})_i \cos(\text{ARG})] \end{aligned} \quad (1.48)$$

⁵Ce travail a été effectué au cours d'une collaboration entre Nicole Capitaine, Jean Chapront, Sébastien Lambert et Patrick Wallace (Capitaine, Chapront, Lambert et Wallace 2003).

⁶Le logiciel GREGOIRE a été développé par Jean Chapront, afin de faciliter la manipulation des séries de Poisson. Une description sommaire de GREGOIRE est donnée en Annexe B de ce travail.

TAB. 1.5 – Nombre de termes pour chaque puissance du temps dans le développement de X et Y .

	t^0	t^1	t^2	t^3	t^4	total
X	1306	253	36	4	1	1600
Y	962	277	30	5	1	1275

$$\begin{aligned}
Y = & - 6950.78 - 25381.99 \times t - 22407250.99 \times t^2 + 1842.28 \times t^3 \\
& + 1113.06 \times t^4 + 0.99 \times t^5 \\
& + \sum_{i,j} t^j \times [(b_{s,j})_i \sin(\text{ARG}) + (b_{c,j})_i \cos(\text{ARG})]
\end{aligned}$$

où les coefficients $(a_{s/c,j})_i$ et les $(b_{s/c,j})_i$ sont présentés dans les tables ci-après. Le tableau 1.5 donne le nombre de termes pour chaque puissance du temps dans le développement de X et Y .

A titre de test pour notre modèle semi-analytique, nous comparons les valeurs de X et Y données par les développements établis ci-dessus aux valeurs obtenues en combinant les données séparées $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ et autres quantités intervenant dans le calcul. Afin de vérifier la validité du modèle analytique dans le domaine du temps, nous avons produit et combiné des éphémérides de 4 siècles autour de J2000.0. Les différences entre les valeurs issues du modèle analytique (X_a et Y_a) et les valeurs issues de la suite de combinaisons des quantités classiques de la précession-nutation (X_b et Y_b) sont reportées sur la figure 1.15. On atteint des écarts de 2 microsecondes d'arc au bout de 2 siècles pour X et 4 microsecondes d'arc pour Y . Le terme en 18.6 ans est en partie responsable des différences. Si on calcule les écarts sur une durée plus importante (figure 1.16), on remarque que les erreurs portent principalement sur les termes polynomiaux. Nous souhaitons garantir une cohérence entre le modèle MHB2000 et notre modèle semi-analytique des X et Y au niveau de la microseconde d'arc sur un siècle. Le spectre des différences montre que les amplitudes ne dépassent jamais 0.3 microseconde d'arc et que nous avons donc atteint la précision voulue.

1.5.2 La quantité s

Le calcul de la quantité s est effectué à partir de l'équation (1.29). Cette formulation rigoureuse peut être remplacée par :

$$s = -\frac{1}{2}[X(t)Y(t) - X(t_0)Y(t_0)] + \int_{t_0}^t \dot{X}(t)Y(t)dt \quad (1.49)$$

où l'on a fait l'approximation $Z = 1$.

Comme pour X et Y , la quantité s contient des termes de Poisson. Les contributions des termes à très longue période (supérieure à 500 ans) ont été remplacées par une

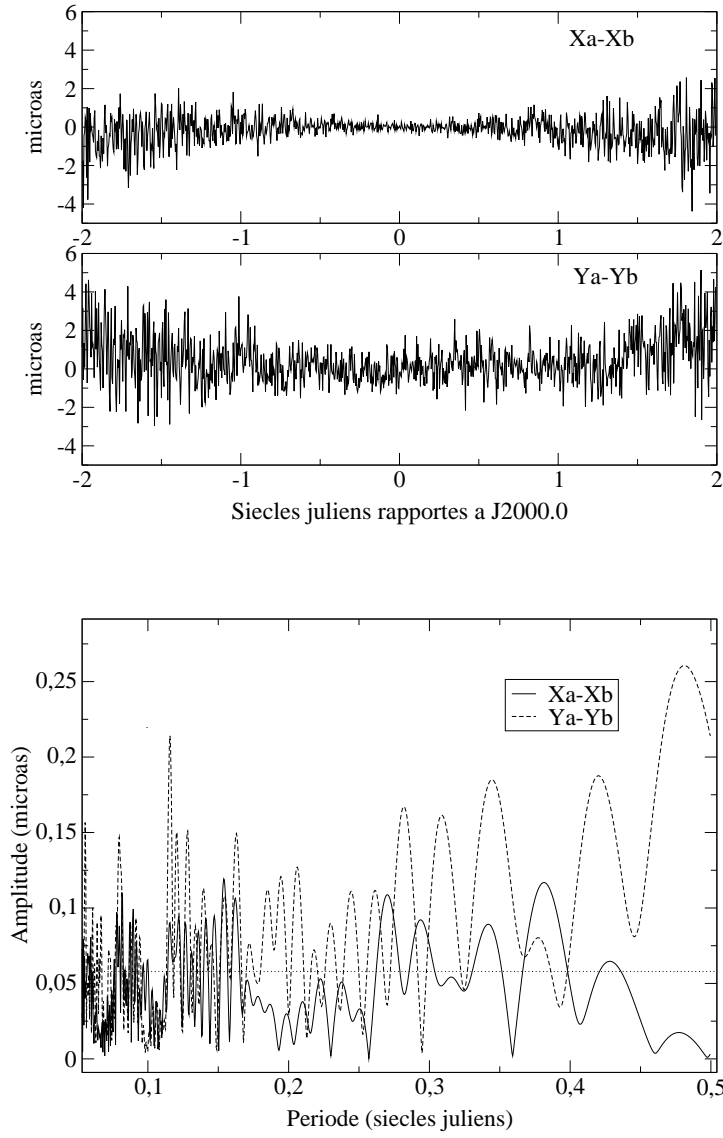


FIG. 1.15 – En haut : différences sur 4 siècles entre X et Y obtenus par le modèle semi-analytique (X_a et Y_a) et par combinaison des quantités classiques de la précession-nutation (X_b et Y_b). En bas : périodogramme des différences. La ligne horizontale en pointillés indique l'erreur formelle sur l'estimation des amplitudes.

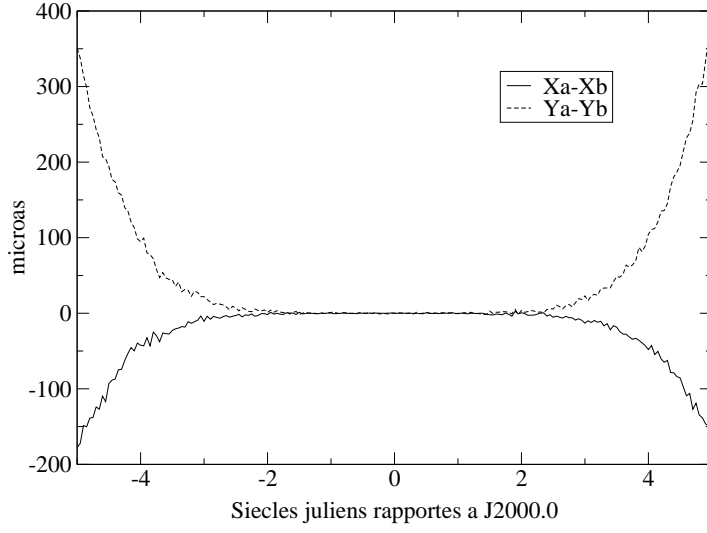


FIG. 1.16 – Différences sur 10 siècles entre X et Y obtenus par le modèle semi-analytique (X_a et Y_a) et par combinaison des quantités classiques de la précession-nutation (X_b et Y_b).

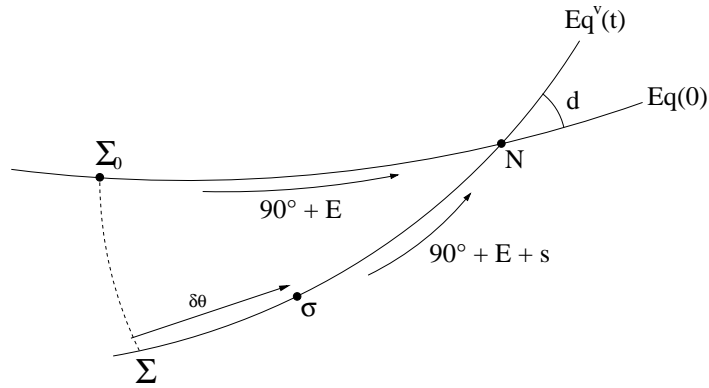


FIG. 1.17 – Quantités s et variation d'angle stellaire $\delta\theta$.

contribution au terme séculaire. Un ajustement du terme constant a été nécessaire afin de garantir une continuité de UT1 au 1er janvier 2003 (Capitaine et al. 2003b).

L'expression finale de s a la forme suivante (voir la figure 1.17), en microsecondes d'arc :

$$s = - XY/2 + \delta\theta \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} &= - XY/2 + 94 + 3808.35 \times t - 119.94 \times t^2 - 72574.09 \times t^3 \\ &+ 27.70 \times t^4 + 15.61 \times t^5 \\ &+ \sum_{i,j} t^j \times [(c_{s,j})_i \sin(\text{ARG}) + (c_{c,j})_i \cos(\text{ARG})] \end{aligned} \quad (1.51)$$

où les coefficients $(c_{s/c,j})_i$ sont présentés dans les tables ci-après. En pratique, on donne ainsi les développements pour $s + XY/2$ qui possède moins de termes que s et qui fait apparaître la variation d'angle stellaire le long de l'équateur vrai. Le nombre de termes pour $s + XY/2$ est ainsi considérablement plus réduit que pour X et Y : 33 termes de degré 0, 3 de degré 1, 25 de degré 2, 4 de degré 3 et 1 de degré 4.

TAB. 1.6 – Les 20 premiers termes du développement de X en microsecondes d'arc.

$a_{s,0}$	$a_{c,0}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-6844318.44	1328.67	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-523908.04	-544.76	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-90552.22	111.23	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
82168.76	-27.64	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
58707.02	470.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28288.28	-34.69	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-20557.78	-20.84	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-15406.85	15.12	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11991.74	32.46	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8584.95	4.42	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6245.02	-6.68	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5095.50	7.19	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4910.93	0.76	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2521.07	-5.97	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2511.85	1.07	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2372.58	5.93	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2307.58	-7.52	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2053.16	5.13	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1898.27	-0.72	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1825.49	1.23	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{s,1}$	$a_{c,1}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-3328.48	205833.15	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
197.53	12814.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41.19	2187.91	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-35.85	-2004.36	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59.15	501.82	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5.82	448.76	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-179.56	164.33	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.67	288.49	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23.85	-214.50	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.87	-154.91	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.14	-119.21	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.17	-74.33	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.47	70.31	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.42	58.94	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.95	57.12	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.08	-54.19	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.92	36.78	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.68	-31.01	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.74	29.60	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.60	-27.59	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$a_{s,2}$	$a_{c,2}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
2038.00	82.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
155.75	-2.70	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26.92	-0.45	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-24.43	0.46	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.36	-0.50	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8.41	0.01	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.08	-1.36	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.59	0.17	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.57	-0.06	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.54	0.60	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.86	0.00	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.52	-0.07	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.46	0.04	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.75	-0.02	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.75	0.00	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.71	-0.01	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.69	0.02	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.61	0.02	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.54	-0.04	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.56	0.00	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{s,3}$	$a_{c,3}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
1.76	-20.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1.27	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.22	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.20	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{s,3}$	$a_{c,3}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-0.10	-0.02	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 1.7 – Les 20 premiers termes du développement de Y en microsecondes d'arc.

$b_{s,0}$	$b_{c,0}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
1538.18	9205236.26	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-458.66	573033.42	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
137.41	97846.69	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-29.05	-89618.24	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-17.40	22438.42	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31.80	20069.50	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36.70	12902.66	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-13.20	-9592.72	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-192.40	7387.02	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.92	-6918.22	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.40	-5331.13	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.90	-3323.89	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.50	3143.98	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7.80	2636.13	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6.60	2554.51	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.00	-2423.59	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6.80	1645.01	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-1387.00	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5.90	1323.81	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.30	-1233.89	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b_{s,1}$	$b_{c,1}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
153041.82	878.89	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11714.49	-289.32	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2024.68	-50.99	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1837.33	47.75	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1312.21	-28.91	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-632.54	0.78	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
459.68	-67.23	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
344.50	1.46	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
268.14	-7.03	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
192.06	29.80	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
139.64	0.15	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-113.94	-1.06	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
109.81	3.18	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-56.37	0.13	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-56.17	-0.02	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-53.05	-1.23	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-51.60	0.17	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
45.91	-0.11	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-42.45	0.02	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
40.82	-1.03	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$b_{s,2}$	$b_{c,2}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
121.15	-2301.27	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.98	-143.27	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	-24.46	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	22.41	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.19	-5.61	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.57	-1.83	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	-5.02	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.04	-3.23	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.48	2.40	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.10	1.73	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	1.33	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.04	0.83	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.05	-0.79	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.03	-0.66	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	-0.64	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.04	0.61	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.41	0	0	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	0.35	0	2	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.33	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	0.31	1	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b_{s,3}$	$b_{c,3}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-15.23	-1.62	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.16	-0.01	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.20	0.00	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.18	0.00	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.13	0.00	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a_{s,3}$	$b_{c,3}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-0.01	0.11	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TAB. 1.8 – Les 20 premiers termes du développement de $s+XY/2$ en microsecondes d'arc.

$c_{s,0}$	$c_{c,0}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-2640.73	0.39	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-63.53	0.02	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11.75	-0.01	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11.21	-0.01	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.57	0.00	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2.02	0.00	0	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1.98	0.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.72	0.00	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.41	0.01	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.26	0.01	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.63	0.00	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.63	0.00	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.46	0.00	0	1	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.45	0.00	0	1	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.36	0.00	0	0	4	-4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.24	0.12	0	0	1	-1	1	0	-8	12	0	0	0	0	0	0
-0.32	0.00	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.28	0.00	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.26	0.00	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_{s,1}$	$c_{c,1}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-0.07	3.57	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.71	-0.03	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.48	0	0	2	-2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$c_{s,2}$	$c_{c,2}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
743.53	-0.17	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
56.91	0.06	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.84	-0.01	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8.85	0.01	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6.38	-0.05	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3.07	0.00	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.23	0.00	0	1	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.67	0.00	0	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.30	0.00	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.93	0.00	0	1	-2	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.68	0.00	1	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.55	0.00	0	0	2	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.53	0.00	1	0	-2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.27	0.00	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.26	0.00	1	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.25	0.00	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.22	0.00	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.21	0.00	2	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.20	0.00	2	0	-2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_{s,3}$	$c_{c,3}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
0.30	-23.51	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.03	-1.39	0	0	2	-2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-0.01	-0.24	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.00	0.22	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c_{s,4}$	$c_{c,4}$	l	l'	F	D	Ω	l_{Me}	l_{Ve}	l_E	l_{Ma}	l_{Ju}	l_{Sa}	l_{Ur}	l_{Ne}	p_A
-0.26	-0.01	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1.5.3 La quantité s'

Jusqu'à présent, la quantité s' n'avait jamais fait l'objet d'une évaluation rigoureuse. En collaboration avec Christian Bizouard, nous l'avons déterminée à la précision requise par les observations actuelles (Lambert et Bizouard 2002).

Le calcul de s' avec la formule (1.30) demande d'intégrer les observations du mouvement du pôle, c'est à dire la position du CIP dans le repère terrestre. Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce Chapitre, le mouvement du pôle est essentiellement composé d'une oscillation de période voisine de 430 jours (oscillation de Chandler), d'une oscillation annuelle et d'une dérive. La figure 1.18 montre les coordonnées terrestres $u = x_p$ et $v = -y_p$ du CIP, ainsi que le spectre de Fourier complexe : on y voit la composante annuelle et la composante chandlérienne, toutes deux progrades. La présence de ces deux oscillations à des fréquences proches l'une de l'autre donne naissance à un battement en 2334 jours.

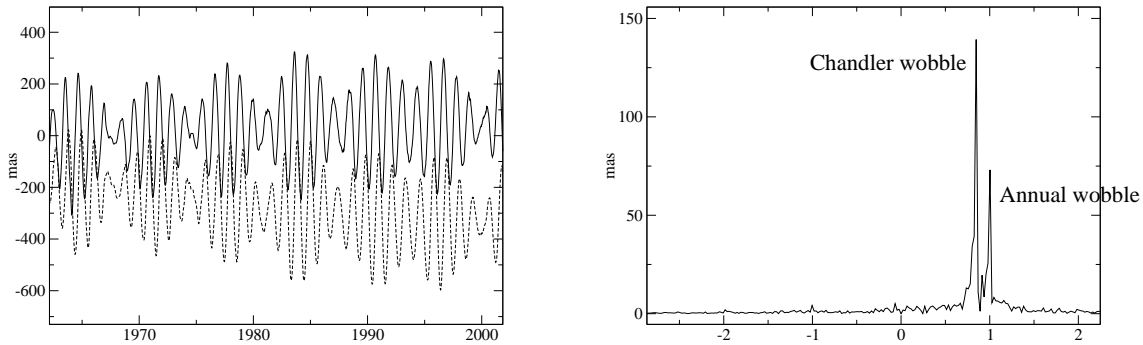


FIG. 1.18 – Coordonnées u (trait plein) et v (trait pointillé) du CIP dans le repère terrestre provenant de la série combinée IERS C04, et spectre de Fourier complexe de la quantité $u + iv$.

Afin de comprendre les variations possibles de la quantité s' , nous allons considérer un modèle simple pour le mouvement du pôle. Pour des variations de période supérieure au jour, le déplacement du CIP dans la Terre peut être modélisé simplement par la superposition d'un terme annuel (amplitude A_a , fréquence σ_a et phase ϕ_a), d'un terme de Chandler (amplitude A_c , fréquence σ_c et phase ϕ_c) et d'une tendance linéaire :

$$\begin{aligned} u &= A_c \cos(\sigma_c t + \phi_c) + A_a \cos(\sigma_a t + \phi_a) + u_0 + u_1 t \\ v &= A_c \sin(\sigma_c t + \phi_c) + A_a \sin(\sigma_a t + \phi_a) + v_0 + v_1 t \end{aligned} \quad (1.52)$$

Les vitesses sont alors données par :

$$\dot{u} = -\sigma_c A_c \sin(\sigma_c t + \phi_c) - \sigma_a A_a \sin(\sigma_a t + \phi_a) + u_1 \quad (1.53)$$

$$\dot{v} = \sigma_c A_c \cos(\sigma_c t + \phi_c) + \sigma_a A_a \cos(\sigma_a t + \phi_a) + v_1$$

Après intégration, on obtient pour s' la forme suivante :

$$s'(t) = L(t) + B(t) + P(t) \quad (1.54)$$

où le premier terme est linéaire :

$$L(t) = -\frac{1}{2} [\sigma_c A_c^2 + \sigma_a A_a^2 + v_1 u_0 - u_1 v_0] t \quad (1.55)$$

Le second terme est périodique de période 2334.4 jours :

$$B(t) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_c + \sigma_a}{\sigma_c - \sigma_a} A_c A_a \sin((\sigma_c - \sigma_a)t + (\phi_c - \phi_a)) \quad (1.56)$$

Le dernier terme est plus complexe et moins significatif :

$$\begin{aligned} P(t) = & - \left[\frac{u_1}{\sigma_c} - \frac{1}{2}(v_0 + v_1 t) \right] A_c \cos(\sigma_c t + \phi_c) \\ & - \left[\frac{v_1}{\sigma_c} + \frac{1}{2}(u_0 + u_1 t) \right] A_c \sin(\sigma_c t + \phi_c) \\ & - \left[\frac{u_1}{\sigma_a} - \frac{1}{2}(v_0 + v_1 t) \right] A_a \cos(\sigma_a t + \phi_a) \\ & - \left[\frac{v_1}{\sigma_a} + \frac{1}{2}(u_0 + u_1 t) \right] A_a \sin(\sigma_a t + \phi_a) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Pour des valeurs typiques des paramètres du modèle : $A_c=200$ mas, $A_a=100$ mas, $u_0=50$ mas, $v_0=-400$ mas, $u_1=0.005$ mas/siècle et $v_1=100$ mas/siècle, on peut déduire l'ordre de grandeur des termes des expressions précédentes (table 1.9). Le terme $B(t)$ est à la limite de la précision voulue. Quant à $P(t)$ qui lui est inférieur, il est négligeable.

A la précision de $1 \mu\text{as}$, l'expression de s' se réduit à la forme linéaire :

$$s'(t) - s'(t_0) = -\frac{1}{2} [\sigma_c A_c^2 + \sigma_a A_a^2] t \quad (1.58)$$

Le mouvement du pôle à haute fréquence (périodes diurnes) doit être ajouté pour une étude rigoureuse. Bien qu'ayant des amplitudes beaucoup plus faibles (inférieures à 0.5 mas) comparées aux amplitudes des termes à longue période, un effet dans s' serait possible à cause de l'intégration temporelle et de leur fréquence élevée. L'effet peut être

TAB. 1.9 – Ordres de grandeur des termes des expressions (1.55), (1.56) et (1.57).

$\sigma_c A_c^2$	100 $\mu\text{as}/\text{siècle}$
$\sigma_a A_a^2$	10 $\mu\text{as}/\text{siècle}$
$u_1 v_0$	10^{-6} $\mu\text{as}/\text{siècle}$
$v_1 u_0$	10^{-6} $\mu\text{as}/\text{siècle}$
$\frac{\sigma_c + \sigma_a}{\sigma_c - \sigma_a} A_c A_a$	1 μas
Autres termes de P	10^{-8} μas

calculé analytiquement en prenant le modèle de Ray (1994) disponible dans les IERS Conventions (McCarthy 1996). L'effet est séculaire et seulement de 0.06 μas par siècle. Il peut donc être négligé.

A partir des données de la série combinée IERS C04, nous avons dérivé numériquement les $u(t)$ et $v(t)$. Pour une série temporelle $S(T)$, la dérivée numérique s'écrit :

$$\dot{S}_n = \frac{S_{n+1} - S_{n-1}}{T_{n+1} - T_{n-1}} \quad (1.59)$$

Une fois obtenus les $\dot{u}(t)$ et $\dot{v}(t)$, on intègre numériquement selon l'équation (1.30). Pour une série temporelle $S(T)$, l'intégrale I est donnée par :

$$I_n = I_{n-1} + \frac{S_n + S_{n-1}}{2} (T_n - T_{n-1}) \quad (1.60)$$

avec $I_0 = 0$. L'incertitude sur les données de la série IERS C04 (30 mas avant 1967) donne une erreur sur s' inférieure à 0.01 μas .

La figure 1.19 montre le résultat de l'intégration numérique sur l'ensemble des données de la série IERS C04, c'est à dire depuis 1962. On remarque une variation périodique de 2334 jours dont l'amplitude avoisine 1 μas . Cette oscillation correspond à la modulation de même période visible dans le mouvement du pôle (battement Chandler/annuel). Ce sont les termes de $B(t)$ (expression (1.56)). Des oscillations de plus faible amplitude aux périodes chandlérienne et annuelle sont aussi visibles (termes de $P(t)$, expression (1.57)). La pente de la courbe varie au cours des 40 ans. En effet, elle dépend de l'amplitude des termes de Chandler et annuel selon la relation (1.58). L'amplitude du terme de Chandler a très fortement varié au cours du siècle passé (Guinot 1972 et Vondrák 1985, 1988). Ces variations sont imprédictibles et ne peuvent donc être modélisées. La figure 1.20 est une décomposition de u et v par analyse en composantes principales (méthode SSA) entre 1900 et 2002. On remarque que sur les 40 ans correspondant à la série IERS C04 (1962.0-2002), l'amplitude du terme de Chandler est relativement stable. Nous avons montré que ces variations d'amplitude induisent une variation de la pente de s' de 13 $\mu\text{as}/\text{siècle}$ au cours de la période 1962-2002.

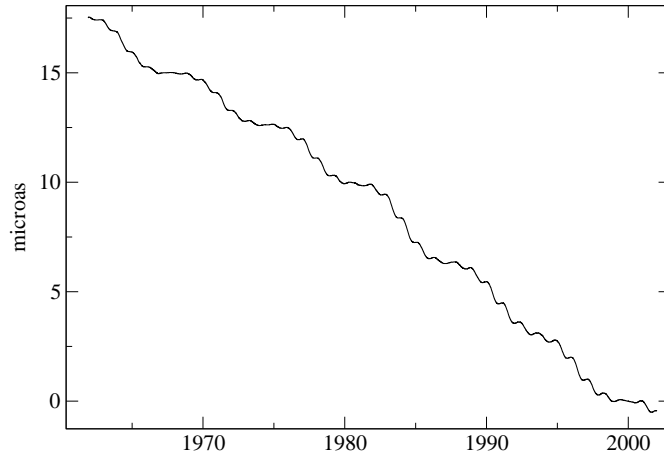


FIG. 1.19 – Quantité s' calculée numériquement à partir des données de mouvement du pôle de la série IERS C04.

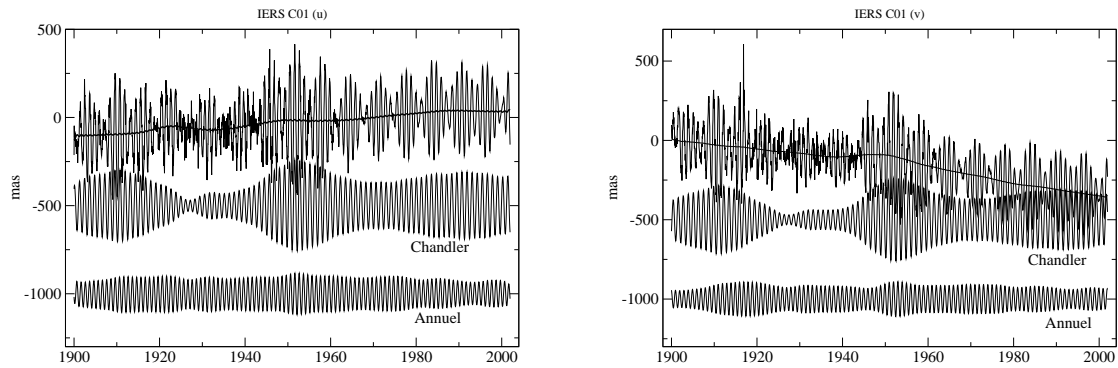


FIG. 1.20 – Décomposition du mouvement du pôle en un terme de Chandler, un terme annuel et une tendance par méthode SSA avec les données de la série IERS C01. Le terme de Chandler est décalé de -500 mas et le terme annuel de -1000 mas pour améliorer la lisibilité.

Un autre calcul numérique de s' a été réalisé en utilisant directement les vitesses \dot{u} et \dot{v} estimées par GPS. Ce calcul n'est possible que pour des observations récentes. Les données disponibles sont celles du CODE (Center for Orbit Determination in Europe) depuis 1993.5, du JPL (Jet Propulsion Laboratory) depuis 1992.4 et enfin du GFZ (Geo-ForschungsZentrum, Allemagne) depuis 1996.5. Ces calculs indépendants sont comparés avec le calcul issu des données de la série IERS C04. Les différences sont reportées sur la figure 1.21. Elles n'excèdent jamais $0.1 \mu\text{as}$ et ne sont donc pas significatives en comparaison de la précision actuelle des observations. Ceci valide deux méthodes de calcul indépendantes.

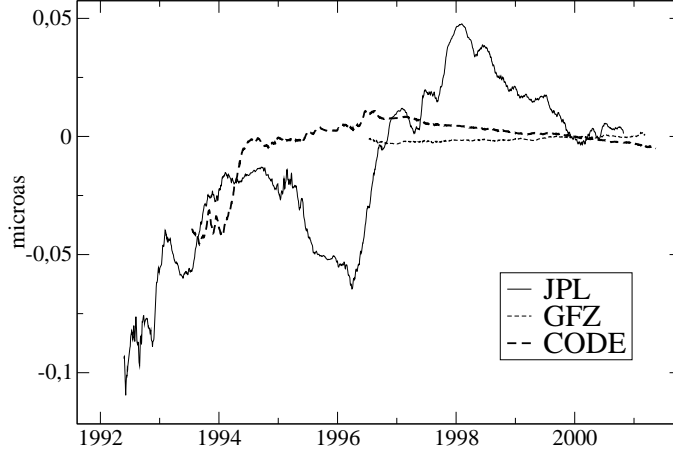


FIG. 1.21 – Différences entre s' calculée à partir de la IERS C04 et à partir de diverses séries GPS incluant les estimations des vitesses \dot{u} et \dot{v} .

Afin de fournir une expression analytique de s' , nous avons effectué un ajustement linéaire sur les valeurs issues de l'intégration numérique (figure 1.22) :

$$s'(t) = -47.0 \times t \quad (1.61)$$

où s' est en μas et t est le Temps Terrestre (TT) exprimé en siècles juliens rapporté à J2000.0. L'incertitude de la valeur ajustée est donnée par la variabilité de la pente sur l'intervalle d'estimation évoquée plus haut et vaut donc $13 \mu\text{as}/\text{siècle}$. Quant à la précision du calcul numérique (intégration), elle est de $1 \mu\text{as}$.

1.5.4 Comparaison aux valeurs observées

Comparaisons pour s

Il existe diverses séries de paramètres d'orientation de la Terre : séries individuelles ou bien séries combinées. Les séries d'EOP donnent, en plus des coordonnées terrestres

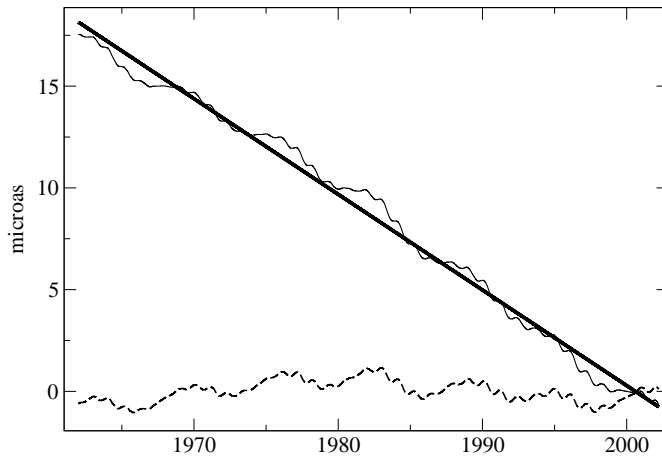


FIG. 1.22 – Ajustement linéaire (trait épais) sur l'intégration numérique (trait fin). Les résidus sont en trait pointillé.

du CIP (mouvement du pôle) et de UT1-UTC, les écarts au pôle céleste (Celestial Pole Offsets, CPO, notés $\delta\psi$, $\delta\epsilon$), c'est à dire les différences entre les valeurs observées de $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ et les valeurs prédites par le modèle de nutation. Jusqu'au 1er janvier 2003, date de mise en application des nouvelles résolution de l'UAI et du nouveau modèle de nutation IAU2000A, les CPO étaient rapportés au modèle de nutation IAU1980. En prenant les CPO de la série IERS C04 (série combinée multitechnique donnant un point par jour), il est possible de calculer des X , Y "observés" selon la procédure :

- 1 - Calcul des $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ "observés" en ajoutant $\delta\psi_{\text{IAU1980}}$, $\delta\epsilon_{\text{IAU1980}}$ aux quantités issues du modèle $\Delta\psi_{\text{IAU1980}}$, $\Delta\epsilon_{\text{IAU1980}}$.
- 2 - Conversion des $\Delta\psi$, $\Delta\epsilon$ "observés" en X , Y "observés".
- 3 - Calcul par dérivation et intégration d'un s "observé".

Un test de validité du modèle analytique de s est réalisé en comparant les valeurs issues de ce modèle et les valeurs "observées", pour les mêmes dates, à partir de la série IERS C04. Les différences sont montrées sur la figure 1.23. La différence reflète les imperfections du calcul numérique à partir des données d'observation. Hormis une tendance d'environ $2 \mu\text{as}$ sur 20 ans, les amplitudes des variations ne dépassent pas $1 \mu\text{as}$.

Écarts au pôle céleste rapportés au modèle IAU2000A

Depuis le 1er janvier 2003, l'IERS publie des écarts au pôle céleste sous forme d'écarts entre les X , Y "observés" et ceux donnés par le modèle IAU2000A. Ces quantités, notées δX , δY sont obtenues à partir des $\delta\psi$, $\delta\epsilon$ rapportés au modèle IAU1980. La conversion en $\delta\psi$, $\delta\epsilon$ rapportés à IAU2000A s'effectue en rajoutant le modèle de nutation IAU1980 puis

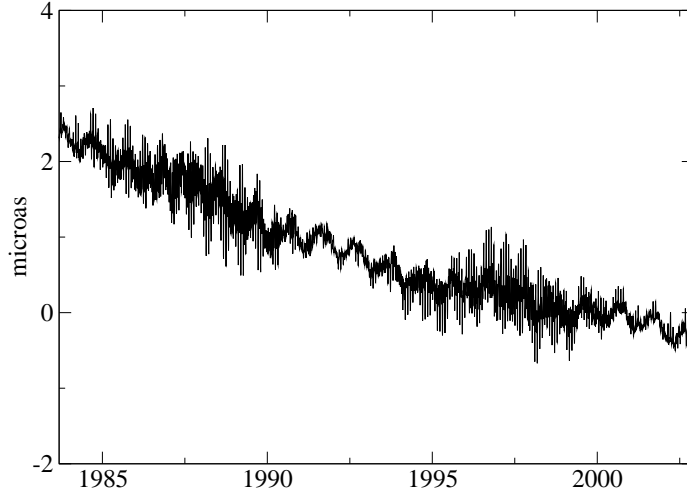


FIG. 1.23 – Différences entre s issue du modèle et s "observée".

en retirant le modèle IAU2000A. Puis, sur ces quantités avoisinant les 1 mas, on convertit en δX , δY au moyen de la relation :

$$\begin{aligned}\delta X &= \delta\psi \sin \epsilon_A + (\psi_A \cos \epsilon_0 - \chi_A)\delta\epsilon \\ \delta Y &= \delta\epsilon - (\psi_A \cos \epsilon_0 - \chi_A)\delta\psi \sin \epsilon_A\end{aligned}\tag{1.62}$$

la valeur de ψ_A étant celle compatible avec IAU2000A (expression (1.46)).

La figure 1.24 montre les écarts au pôle céleste rapportés successivement à IAU1980, puis à IAU2000A, entre les années 2000 et 2003. Le spectre des CPO rapportés à IAU1980 montre un pic supérieur à 3 mas pour une période de 1 an. Il s'agit d'un terme annuel lunisolaire mal modélisé. Pour les CPO rapportés au nouveau modèle de nutation, ce terme a été corrigé en grande partie et son amplitude atteint alors environ 50 μas . Ce résidu provient des effets atmosphériques dont l'amplitude est variable au cours du temps (Bizouard et al. 1998, Yseboodt et al. 2002) et qui ne sont pas pris en compte dans le modèle MHB2000. Le pic principal dans le spectre se situe à une période de 430 jours. Il est dû à la nutation libre du noyau (Free Core Nutation, FCN) d'amplitude moyenne supérieure à 200 μas . Cette amplitude est variable dans le temps (Herring et al. 2002) et non prise en compte dans le modèle de nutation MHB2000. On la retrouve dans les observations tout comme les effets induits par l'atmosphère. En Annexe D, nous proposons une modélisation empirique de ce signal.

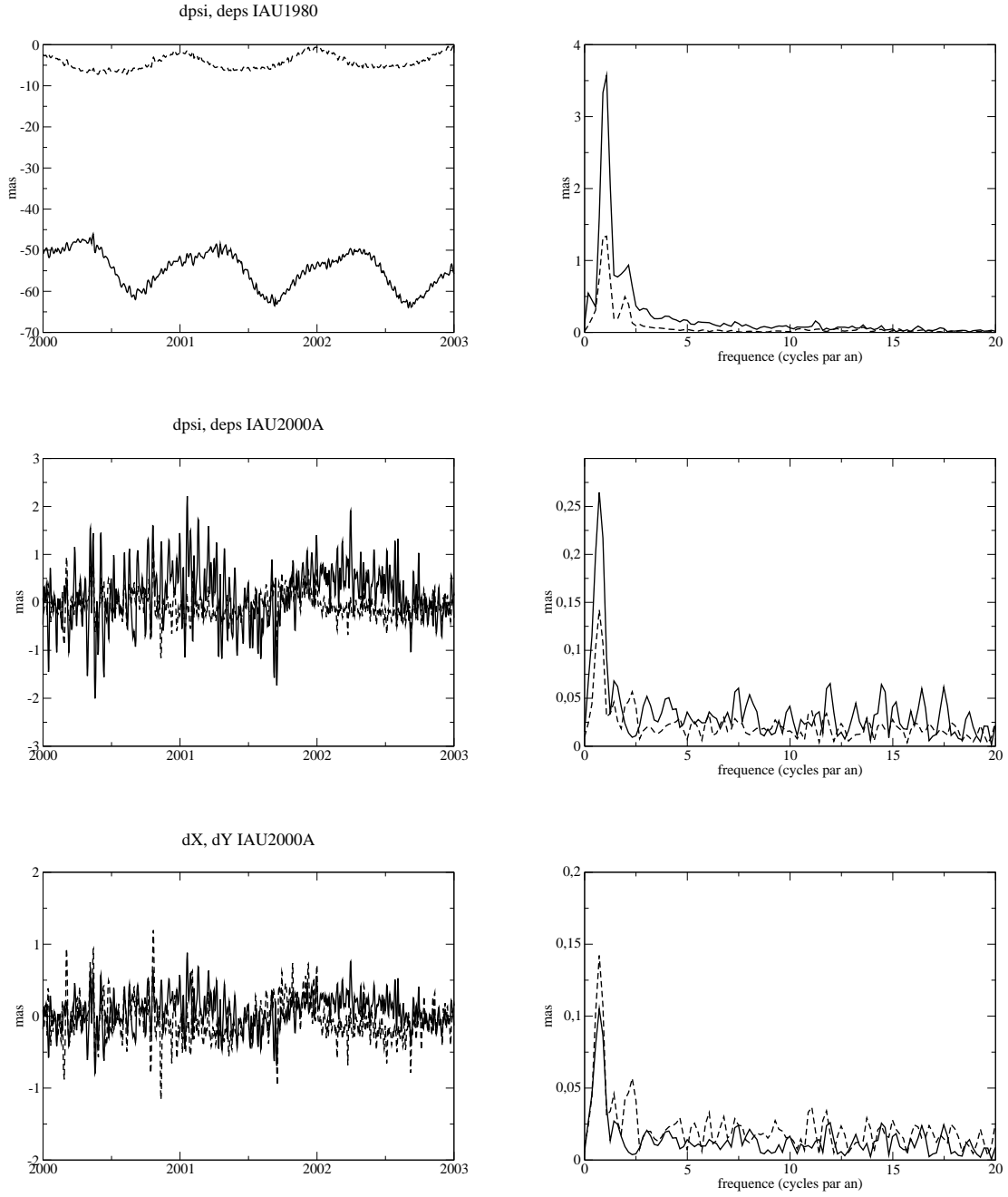


FIG. 1.24 – Ecart au modèle de la série IERS C04 et spectres de Fourier associés. En trait plein : $\delta\psi$ et δX . En trait pointillé : $\delta\epsilon$ et δY .

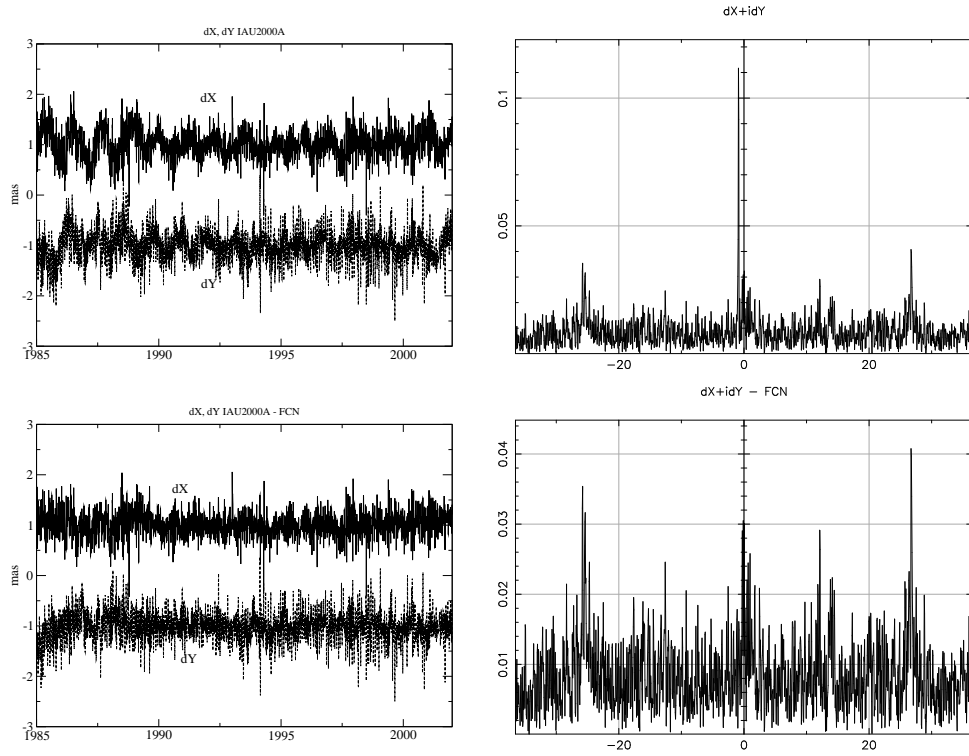


FIG. 1.25 – Ecart au modèle de la série IERS C04 et spectres de Fourier complexes associés avant (haut) et après (bas) retrait du modèle empirique de FCN (Herring et al. 2002). Pour plus de lisibilité, δX est décalée de +1 mas et δY de -1 mas. Les fréquences du spectre sont en cycles par an. Le pic pour la FCN (rétrograde) s'élève à un peu plus de 100 μas .

1.6 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons calculé les développements pour les quantités X , Y , s et s' nécessaires dans la transformation entre TRF et CRF utilisant l'Origine Non-Tournante. Ces développements sont cohérents avec le modèle IAU2000A à $0.5 \mu\text{as}$. Ces modèles constituent une partie prédictible de la rotation terrestre. Toutefois, la transformation entre le TRF et le repère intermédiaire utilise les coordonnées du pôle dans la Terre x_p et y_p qui restent non-modélisables car leurs variations sont principalement induites par l'atmosphère et les océans. L'évaluation des effets de ces deux couches fluides externes sur les EOP fait l'objet du Chapitre suivant.

Chapitre 2

Analyse des effets des couches fluides externes sur la rotation terrestre

Les causes physiques des variations de la rotation de la Terre sont très diverses. Nous avons évoqué dans le premier Chapitre les forces de gravitation lunisolaire qui s'exercent sur la forme de la Terre, l'influence de l'atmosphère et des océans ou encore la rotation libre du noyau liquide. L'action de la Lune et du Soleil sur la figure de la Terre peut être modélisée par une théorie dynamique des corps du système solaire et en utilisant un certain nombre de paramètres ajustés sur les observations pour rendre compte de la non-rigidité de notre planète. De ce fait, son effet sur la rotation terrestre, qui se traduit principalement par la précession-nutation, constitue un ensemble de variations modélisables et prédictibles (les écarts entre les observations et le modèle sont de l'ordre de $200\mu\text{as}$). Ce n'est plus le cas pour l'atmosphère et les océans. Prédire l'effet sur la rotation induit par les mouvements de ces couches fluides demanderait une connaissance parfaite de la circulation atmosphérique et océanique, ce qui est encore du domaine de la prospective. A l'heure actuelle, des modèles numériques très lourds contraints par des données d'observation permettent d'estimer le moment cinétique global de l'atmosphère depuis 1948 jusqu'à aujourd'hui avec un délai de 24 heures. Le moment cinétique des océans reste estimé sporadiquement et de manière incertaine.

De nombreux travaux ont déjà traité de l'influence des couches fluides sur la rotation terrestre. Citons l'article de Munk et Groves (1952) où les variations saisonnières du mouvement du pôle sont expliquées par les redistributions des masses d'air entre diverses parties du globe. Wahr (1982 et 1983) complète le travail publié dans l'article Wahr et Sasao (1981) en ajoutant l'effet des courants océaniques et des vents (et également pour la première fois l'effet d'un noyau fluide). Il reconsidère le rôle de l'atmosphère et des océans dans les variations annuelles et saisonnières du pôle et dans le mécanisme d'excitation de l'oscillation libre de Chandler. Il conclut que les couches fluides externes ne rendent compte que de 20 à 25 pour cent de la puissance observée, et qu'il doit exister une source d'excitation plus importante et encore inconnue. Le calcul récent (1998) de séries complètes de moment cinétique océanique a permis de calculer un bilan du moment angulaire du système total Terre solide + atmosphère + océans. Depuis quelques années, la part de l'océan dans l'excitation du terme de Chandler est régulièrement estimée (Gross 2000a, Brzeziński et Nastula 2002, Brzeziński et al. 2003). En ce qui concerne la longueur du jour (LOD), plusieurs études ont montré que l'atmosphère expliquait 90% des varia-

tions saisonnières et intra-saisonnières (Hide et al. 1980, Barnes et al. 1983). Les couches fluides affectent non seulement le mouvement du pôle et la longueur du jour, mais aussi la nutation. En effet, les fluctuations diurnes de pression, de vent, de hauteur d'eau et de courant (marées océaniques) induisent une variation rétrograde diurne du moment cinétique atmosphérique global, d'où un effet significatif sur certains termes de la nutation dont l'évaluation reste délicate (Bizouard et al. 1998, Yseboodt et al. 2002) en raison d'une modélisation imparfaite de l'interaction atmosphère-océan aux fréquences diurnes.

Dans ce Chapitre, nous nous proposons de faire une synthèse des effets atmosphériques et océaniques sur la rotation terrestre à partir de résultats déduits des séries de moment cinétique atmosphérique et océanique les plus récentes. Le but est de proposer un modèle pour les effets principaux (saisonniers et diurnes), tout en caractérisant leur variabilité. Alors que la plupart des travaux consacrés à ce domaine le sont dans une optique géophysique, nous voulons dresser un bilan astrométrique.

2.1 Dynamique de la rotation de la Terre en présence de couches fluides externes

2.1.1 Description du mouvement de l'axe instantané de rotation

Ce paragraphe résume la représentation classique des équations de la rotation de la Terre et des solutions qui s'en déduisent (voir par exemple Lambeck 1980, ou Munk et McDonald 1960).

La dynamique d'un corps en rotation est spécifiée par l'équation reliant, dans un repère inertiel, la variation du moment cinétique \vec{H} de ce corps, au moment $\vec{\Gamma}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad (2.1)$$

Par rapport à ce système, la Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme légèrement perturbé autour de l'axe Oz du repère terrestre, de vecteur instantané $\vec{\omega}$. En conséquence, le vecteur instantané de rotation s'exprime dans le repère terrestre par :

$$\vec{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

où $\Omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/s est la vitesse de rotation moyenne de la Terre et les écarts m_i (sans dimension) sont petits devant l'unité (l'observation montre que $m_1 \sim m_2 \sim 10^{-6}$ et $m_3 \sim 10^{-8}$). Ici et dans la suite, les indices 1, 2 et 3 sont mis pour les composantes x , y et z respectivement.

Dans notre approche, nous considérons que la Terre est un corps homogène et déformable. L'ensemble possède un mouvement de rotation rigide, auquel viennent s'ajouter

des petits déplacements relatifs de masse (dans le noyau fluide ou bien dans les couches fluides externes). Le moment cinétique de la Terre entière s'écrira donc comme la somme d'un moment cinétique "rigide" donné par la matrice d'inertie $\underline{\bar{I}}$, et d'un moment cinétique "relatif" \vec{h} :

$$\vec{H} = \underline{\bar{I}}\vec{\omega} + \vec{h} \quad (2.3)$$

La Terre est au premier ordre un ellipsoïde de révolution. Dans le repère terrestre, dont les axes sont orientés selon les axes principaux d'inertie moyens de la Terre, sa matrice d'inertie $\underline{\bar{I}}$ s'écrit :

$$\underline{\bar{I}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où A, B, C sont les moments d'inertie principaux moyens et les c_{ij} des incréments d'inertie supposés petits dûs aux déformations ou aux anomalies de masse. Le terme de gauche (matrice diagonale) représente donc l'ellipsoïde, et celui de droite représente les écarts à l'ellipsoïde. Pour notre propos, nous assimilerons la Terre à un ellipsoïde biaxial, et nous poserons donc que $B = A$ (la différence relative est de l'ordre de 10^{-5}). Rappelons que les éléments de la matrice (ou tenseur) d'inertie se calculent comme suit :

$$I_{ij} = \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho dV \quad (2.5)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, ρ la densité du corps et V son volume. Ce tenseur d'inertie possède d'autres propriétés que nous expliciterons dans le dernier Chapitre de ce rapport.

Compte tenu que l'ensemble des grandeurs considérées sont exprimées dans le repère terrestre tournant parce qu'elles y admettent une forme plus simple (la matrice d'inertie, par exemple), nous y exprimons aussi l'équation de la dynamique :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{\Gamma} \quad (2.6)$$

En explicitant les dérivées et le produit vectoriel, et en limitant le calcul au premier ordre en m_i et c_{ij} , on obtient les équations d'Euler-Liouville linéarisées :

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 + \sigma_r m_2 + \frac{\dot{c}_{13}}{A} - \Omega \frac{c_{23}}{A} + \frac{\dot{h}_1}{A\Omega} - \frac{h_2}{A} &= \frac{\Gamma_1}{A\Omega} \\ \dot{m}_2 - \sigma_r m_1 + \frac{\dot{c}_{23}}{A} + \Omega \frac{c_{13}}{A} + \frac{\dot{h}_2}{A\Omega} + \frac{h_1}{A} &= \frac{\Gamma_2}{A\Omega} \\ \dot{m}_3 + \frac{\dot{c}_{33}}{C} + \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} &= \frac{\Gamma_3}{C\Omega} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $\sigma_r = \frac{C-A}{A}\Omega$ est la pulsation d'Euler (période de 305 jours). L'erreur introduite par la suppression des termes du second ordre (qui sont des termes de couplages entre les m_i ou bien entre la triaxialité et les m_i) atteint au plus $10^{-5} \times 10^{-6} = 10^{-11}$, soit environ $2 \mu\text{as}$, ce qui est tout à fait négligeable en regard de la précision des effets atmosphériques ou océaniques. En adoptant les notations complexes $m = m_1 + im_2$, $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$, $h = h_1 + ih_2$ et $c = c_{13} + ic_{23}$, l'expression devient :

$$\begin{aligned} \dot{m} - i\sigma_r m + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} + \frac{\dot{h} + i\Omega h}{A\Omega} &= \frac{\Gamma}{A\Omega} \\ \dot{m}_3 + \frac{\dot{c}_{33}}{C} + \frac{\dot{h}_3}{C\Omega} &= \frac{\Gamma_3}{C\Omega} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ces équations donnent le mouvement de l'axe instantané de rotation de la Terre en fonction d'une excitation qui apparaît sous la forme d'un moment de force extérieur (Γ_i) ou bien d'un déplacement de masse surfacique ou interne (moment cinétique relatif h_i), ou encore sous forme de déformations (les termes c_{ij} du tenseur d'inertie). Toutefois, ces variations c_{ij} sont causées en partie par des mouvements de masses induits par une force externe ou interne ou inertielle (gravitation lunisolaire, effet de charge océanique, atmosphérique, effet centrifuge induit par les variations de la vitesse de rotation, etc...).

On écrit couramment la partie équatoriale de l'équation (2.8) sous une forme sans dimension en gardant dans le membre de gauche uniquement les termes contenant m et \dot{m} . Le membre de droite prend alors le nom de fonction d'excitation (notée ψ dans la littérature) :

$$\begin{aligned} m + \frac{i}{\sigma_r} \dot{m} &= \frac{i\Gamma}{A\Omega\sigma_r} - \frac{i\dot{c} - \Omega c}{A\sigma_r} - \frac{i\dot{h} - \Omega h}{A\Omega\sigma_r} \\ m_3 &= \int \frac{\Gamma_3}{C\Omega} dt - \frac{c_{33}}{C} - \frac{h_3}{C\Omega} + C^{te} \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1.2 Effet sur les paramètres d'orientation terrestre

Mouvement du pôle

Les équations de Liouville nous donnent le mouvement de l'axe instantané de rotation dans le repère terrestre. L'axe du CIP est légèrement différent de cet axe. On peut montrer que la relation entre les coordonnées m du pôle instantané de rotation et les coordonnées $p = x_p - iy_p$ du CIP dans le repère terrestre est (Brzeziński et Capitaine 1993) :

$$m = p - \frac{i}{\Omega} \dot{p} \quad (2.10)$$

Durée du jour

La longueur du jour (LOD) est directement reliée à la norme du vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$:

$$LOD = \frac{2\pi k}{\|\vec{\omega}\|} \quad (2.11)$$

où $k = 1.002737909350795$ est le rapport de la durée du jour solaire moyen sur la durée du jour sidéral moyen¹.

Au premier ordre en m_3 , la norme du vecteur de rotation peut s'écrire $\|\vec{\omega}\| = \Omega(1 + m_3)$. On en déduit la longueur du jour :

$$LOD = \frac{2\pi k}{\Omega(1 + m_3)} \simeq \frac{2\pi k}{\Omega}(1 - m_3) \quad (2.12)$$

Dans cette expression, la durée conventionnelle du jour solaire moyen est :

$$\overline{LOD} = \frac{2\pi k}{\Omega} \quad (2.13)$$

alors que l'excès de la longueur du jour est :

$$\Delta LOD = -\frac{2\pi k}{\Omega}m_3 \quad (2.14)$$

Précession-nutation

La précession-nutation peut être déduite des changements du vecteur instantané de rotation par les relations cinématiques d'Euler obtenues en écrivant que le passage du repère écliptique de la date au repère terrestre s'effectue par la séquence de trois rotations utilisant les angles d'Euler (définis au Chapitre précédent) :

$$R_3(\Phi)R_1(\theta)R_3(\Psi) \quad (2.15)$$

Cette série de rotations équivaut à dire que le vecteur de rotation instantané résultant possède les composantes suivantes dans le repère terrestre :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \Phi - \dot{\Psi} \sin \theta \sin \Phi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \Phi - \dot{\Psi} \sin \theta \cos \Phi \\ \omega_3 &= \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

¹Si la vitesse de rotation moyenne de la Terre Ω se rapporte naturellement au jour sidéral (rotation d'angle 2π), la longueur du jour se rapporte au jour solaire (rotation d'angle $2\pi k$). Ainsi, la longueur du jour moyenne est de 86400 secondes ($2\pi k/\Omega$) alors que celle du jour sidéral est de 86164 secondes ($2\pi/\Omega$).

Ce sont les relations cinématiques d'Euler. En identifiant les composantes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ à $\Omega(m_1, m_2, 1 + m_3)$, il vient la forme condensée :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta &= -\Omega m e^{i\Phi} \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \theta &= \Omega(1 + m_3)\end{aligned}\tag{2.17}$$

Les relations réciproques de (2.16) sont :

$$\begin{aligned}\sin \theta \dot{\Psi} &= -\omega_1 \sin \Phi - \omega_2 \cos \Phi \\ \dot{\theta} &= -\omega_1 \cos \Phi + \omega_2 \sin \Phi \\ \dot{\Phi} &= \omega_3 - \dot{\Psi} \cos \theta\end{aligned}\tag{2.18}$$

Les angles de nutation rapportés à l'écliptique de la date, notés en minuscules grecques ($\Delta\psi$ pour la nutation en longitude et $\Delta\epsilon$ pour la nutation en obliquité) sont inversés par rapport aux angles d'Euler.

$$\begin{aligned}\Delta\psi \sin \epsilon &= \Delta\Psi \sin \theta \\ \Delta\epsilon &= -\Delta\theta\end{aligned}\tag{2.19}$$

La précession est la partie polynomiale des paramètres Ψ et θ alors que la nutation est constituée par leur partie périodique.

2.1.3 Méthode du moment cinétique

Lorsqu'on s'intéresse à l'effet d'une couche fluide sur la rotation du corps qu'elle enveloppe, la méthode la plus communément adoptée part de l'hypothèse que, du point de vue de l'interaction entre la Terre solide et les couches fluides, le moment cinétique du système global est conservé, ce système étant isolé. Dès lors, toute variation de moment cinétique dans les couches fluides est intégralement transmis avec le signe opposé à la Terre solide et l'on en déduit les effets sur la rotation terrestre. C'est la méthode dite du moment cinétique (en anglais "angular momentum approach").

Formulation de l'excitation de la couche fluide

Les fonctions d'excitation dans le membre de droite de la relation (2.8) se réduisent au moment cinétique relatif (h et h_3) et les déformations (c et c_{33}) :

$$\begin{aligned}m + \frac{i}{\sigma_r} \dot{m} = \psi &= -\frac{i\dot{c} - \Omega c}{A\sigma_r} - \frac{i\dot{h} - \Omega h}{A\Omega\sigma_r} \\ \dot{m}_3 = \dot{\psi}_3 &= -\frac{\dot{c}_{33}}{C} - \frac{\dot{h}_3}{C\Omega}\end{aligned}\tag{2.20}$$

ce que l'on peut également écrire sous la forme :

$$m + \frac{i}{\sigma_r} \dot{m} = \chi - \frac{i}{\Omega} \dot{\chi} \quad (2.21)$$

où χ est la fonction d'excitation équatoriale :

$$\chi = \frac{h + \Omega c}{(C - A)\Omega} \quad (2.22)$$

et pour la troisième composante (voir l'équation (2.12)) :

$$\frac{\Delta LOD}{LOD} = -m_3 = \chi_3 \quad (2.23)$$

où χ_3 est la fonction d'excitation axiale :

$$\chi_3 = \frac{h_3 + \Omega c_{33}}{C\Omega} \quad (2.24)$$

Notons que dans la littérature consacrée aux effets atmosphériques ou océaniques sur la rotation de la Terre, les quantités χ et χ_3 sont nommées soit fonctions d'excitation (atmospheric/oceanic excitation functions) soit fonctions de moment angulaire (angular momentum functions) (Barnes et al. 1983).

Le moment angulaire atmosphérique ou océanique peut être séparé en deux termes. Le premier terme correspond à la rotation rigide de la couche fluide avec la Terre (voir la figure 2.1). On l'appelle terme de pression ou terme de matière (indice p) et il est exprimé comme le produit du tenseur d'inertie de la couche fluide avec le vecteur instantané de rotation de la Terre. Le second terme comprendra tous les déplacements relatifs des masses fluides par rapport à la Terre solide. On l'appelle terme de vent ou terme de courant (indice v), suivant que la couche fluide considérée est l'atmosphère ou l'océan. Les expressions de ces termes sont données par exemple dans l'article de Barnes et al. (1983). En faisant une approximation de couche mince, *i.e.* en considérant que l'épaisseur de la couche fluide est très inférieure au rayon terrestre, et en écrivant la relation d'équilibre hydrostatique $dp = -\rho g dr$, on aboutit aux expressions suivantes pour les termes de matière et de courant dans le repère terrestre :

$$\vec{H}_p = \frac{a^4}{g} \Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P_s \sin^2 \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta d\lambda \quad (2.25)$$

et :

$$\vec{H}_v = \frac{a^3}{g} \int_0^{P_s} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \begin{pmatrix} v_\theta \sin \lambda + v_\lambda \cos \theta \cos \lambda \\ -v_\theta \cos \lambda + \cos \theta \sin \lambda \\ -v_\lambda \sin \theta \end{pmatrix} dp d\theta d\lambda \quad (2.26)$$

où a est le rayon équatorial de la Terre, Ω , la vitesse angulaire de la Terre, g , la pesanteur moyenne, v_λ et v_θ , les vitesses relatives respectivement longitudinales et méridionales des fluides par rapport à la Terre solide, θ , la colatitude et λ , la longitude, P_s , la pression de l'air au sol ou de l'eau sur le plancher océanique, et dp , l'incrément de pression (associé à un incrément de hauteur d'eau dans le cas des océans).

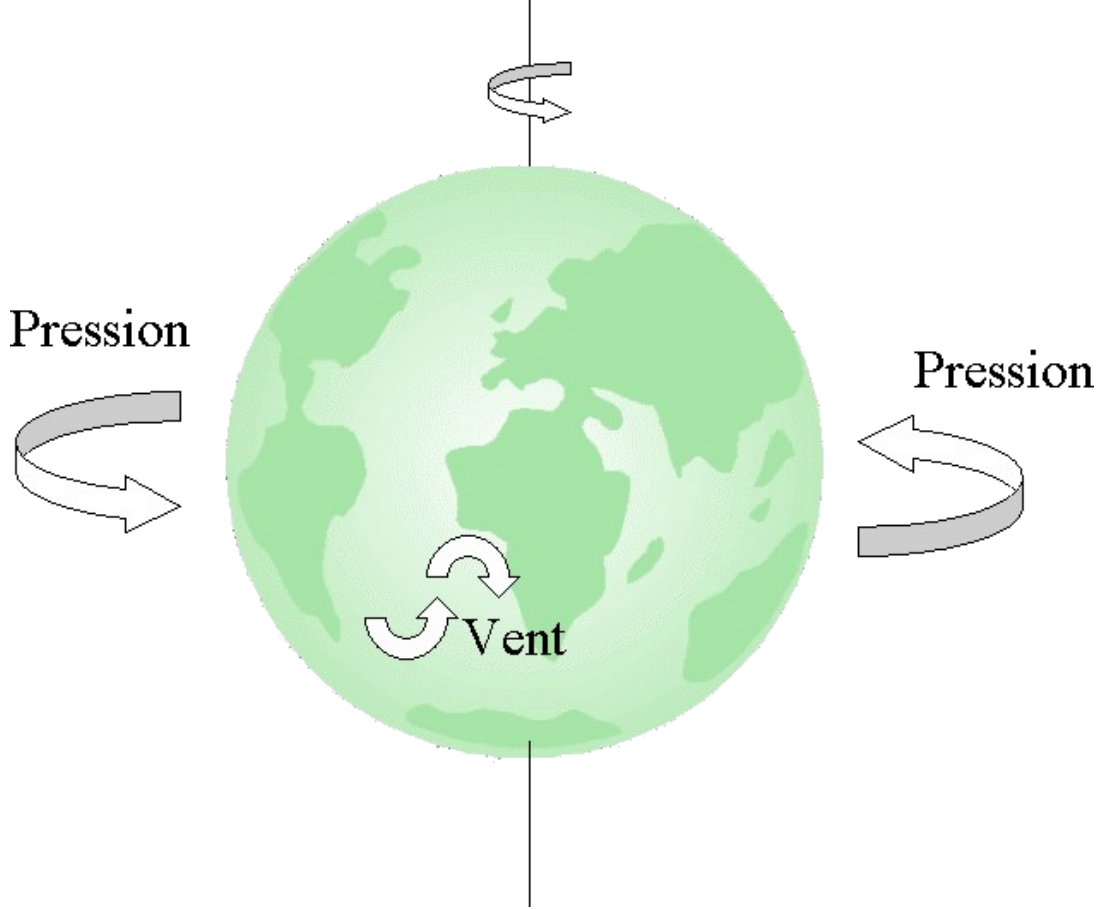


FIG. 2.1 – Termes de pression et de vent du moment cinétique d'une couche fluide.

Dans le cas d'une Terre rigide, les incréments d'inertie c et c_{33} sont nuls, et le moment cinétique s'écrit en fonction de l'excitation :

$$\begin{aligned} H_1^p &= (C - A)\Omega\chi_1^p \\ H_2^p &= (C - A)\Omega\chi_2^p \\ H_3^p &= C\Omega\chi_3^p \end{aligned} \quad (2.27)$$

et :

$$\begin{aligned}
H_1^v &= (C - A)\Omega\chi_1^v \\
H_2^v &= (C - A)\Omega\chi_2^v \\
H_3^v &= C\Omega\chi_3^v
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dans le cas d'un modèle de Terre déformable possédant un manteau élastique (incrément d'inertie non nuls) et un noyau fluide, les fonctions d'excitation sont modifiées. On parle alors de fonctions d'excitation effectives (effective angular momentum functions). La nouvelle expression fait intervenir la fréquence d'excitation σ et la fréquence de résonance associée à la nutation libre du noyau fluide (Free Core Nutation, FCN) notée σ_{FCN} , les moments d'inertie de la Terre et du noyau (A et A_f^2) et le rapport du nombre de Love k au nombre de Love séculaire κ :

$$\begin{aligned}
\chi_p^{eff} &= \left(1 + \frac{A_f}{A} \frac{\sigma_{FCN} + \Omega}{\sigma - \sigma_{FCN}}\right) \chi_p \\
\chi_v^{eff} &= \frac{1}{1 - \frac{k}{\kappa}} \left(1 + \frac{A_f}{A} \frac{\sigma_{FCN} + \Omega}{\sigma - \sigma_{FCN}}\right) \chi_v
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Lorsque on est loin de la fréquence σ_{FCN} (période de 430 jours dans l'espace, ou rétrograde diurne dans la Terre), on a :

$$\begin{aligned}
H_1^p &= (C_m - A_m)\Omega\chi_1^{p,eff} \\
H_2^p &= (C_m - A_m)\Omega\chi_2^{p,eff} \\
H_3^p &= \frac{C_m\Omega}{0.70}\chi_3^{p,eff}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

et :

$$\begin{aligned}
H_1^v &= \frac{(C_m - A_m)\Omega}{1.43}\chi_1^{v,eff} \\
H_2^v &= \frac{(C_m - A_m)\Omega}{1.43}\chi_2^{v,eff} \\
H_3^v &= C_m\Omega\chi_3^{v,eff}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où C_m et A_m sont les moments d'inertie du manteau (valeurs recommandées par l'IAG, 1999 : $C_m = 7.0400 \times 10^{37}$ kg m², $A_m = 7.0165 \times 10^{37}$ kg m²).

La relation (2.21), valable pour une Terre rigide et faisant intervenir la fréquence de résonance d'Euler $\sigma_r = \frac{C-A}{A}\Omega$, est alors modifiée dans le cas d'une Terre déformable. La fréquence d'Euler est remplacée par la fréquence de Chandler σ_{cw} :

$$\sigma_{cw} = -\frac{A}{A_m} \left(1 - \frac{k}{\kappa}\right) \sigma_r \tag{2.32}$$

²L'indice f pour les grandeurs relatives au noyau est mis pour "fluid" dans la littérature.

où A_m est le moment d'inertie du manteau. On a alors :

$$m + \frac{i}{\sigma_{cw}} \dot{m} = \chi^{eff} - \frac{i}{\Omega} \dot{\chi}^{eff} \quad (2.33)$$

où $\chi^{eff} = \chi^{p,eff} + \chi^{v,eff}$.

Modèle d'océan statique barométrique (IB) et non-barométrique (NIB)

On ne peut pas considérer l'influence de l'atmosphère sur la Terre solide sans tenir compte de la réaction des océans aux variations de pression atmosphérique et aux vents en surface. En effet, l'atmosphère agit indirectement, au travers de la couche océanique sur la Terre solide en induisant des courants marins et des changements dans la hauteur d'eau.

Un océan statique est un océan dont les eaux n'ont aucun mouvement global relativement à la Terre solide. Le moment cinétique océanique induit par l'atmosphère ne comporte que le terme de pression (pression de l'eau sur le plancher océanique). On impose là une condition réductrice, mais fort intéressante par les simplifications qu'elle apporte. On suppose alors que les océans ne peuvent présenter que deux réactions possibles face aux variations de pression atmosphérique. Une première hypothèse stipule que l'océan réagit comme un baromètre inversé (en anglais Inverted Barometer, IB, voir Munk et McDonald, 1960), c'est à dire que la pression totale (air + eau) sur le plancher océanique reste invariante. Si la pression atmosphérique à la surface augmente, c'est donc la hauteur d'eau qui diminue pour compenser cette augmentation. On admet alors que l'eau déplacée se répartit sur toute la surface immergée du globe mais de façon si lente que le moment cinétique relatif associé à cette redistribution demeure négligeable. Cette hypothèse IB doit offrir à l'eau le temps pour se réajuster lors d'une variation de pression atmosphérique. En conséquence, le modèle IB semble approprié pour les longues périodes. L'observation a montré que la réaction IB constitue une approximation honorable pour les "longues périodes" (c'est à dire les échelles de temps supérieures à 10 jours). En pratique, une hypothèse IB conduit à ne calculer le terme de pression du moment cinétique atmosphérique uniquement sur les continents (voir par exemple de Viron et Dehant 1999).

Pour des échelles de temps plus courtes, et notamment la bande diurne (dont la partie rétrograde jouera pour la nutation), la réaction de l'océan à l'excitation atmosphérique reste inconnue. On est amené à supposer que l'océan et l'atmosphère sont découplés pour ces fréquences. En l'occurrence, l'océan ne réagit pas aux variations de pression atmosphérique et ces variations sont transmises intégralement au plancher océanique et donc à la Terre solide. C'est l'hypothèse dite du baromètre non-inversé (en anglais, Non-Inverted Barometer, NIB).

Chaque série de moment cinétique atmosphérique est ainsi donnée dans une version IB et une version NIB.

Modèle d'océan dynamique

Un modèle d'océan est dynamique lorsqu'on calcule la réponse de la masse liquide à l'excitation atmosphérique. L'océan possède alors un moment cinétique comme l'atmosphère avec un terme provenant des courants et un terme provenant des variations de la hauteur d'eau (terme de matière).

2.1.4 Méthode des moments de force

Dans la méthode précédente, nous avons considéré la Terre globale, c'est à dire comme un système Terre solide (élastique et contenant un noyau fluide) + atmosphère + océan. Mais la Terre globale peut être séparée en sa partie solide et en la partie constituée par les couches fluides externes, cette dernière partie exerçant son influence sur la première. Ainsi une couche fluide à la surface d'un corps solide exerce nécessairement des forces sur ce corps solide (une force de surface, comme la pression ou la friction, ou bien une force à distance, comme la gravitation). La modélisation de ces interactions permet d'évaluer le moment de ces forces sur le corps solide et l'effet résultant sur sa rotation. Cette approche constitue la méthode dite des "moments de force", appelée aussi de manière abusive méthode du "couple" (en anglais : torque approach).

Formulation

Le moment de force des fluides qui induit une variation du moment cinétique de la Terre solide qui s'écrit :

$$\frac{d\vec{H}_{terre\ solide}}{dt} = \vec{\Gamma}_{fluide \rightarrow terre\ solide} \quad (2.34)$$

où $\vec{\Gamma}_{fluide \rightarrow terre\ solide}$ désigne le moment de force exercé par les couches fluides sur la Terre solide. Ce moment de force, en vertu du principe de l'action et de la réaction, est exactement l'opposé du moment de force exercé par la Terre solide sur les couches fluides. Ecrivons le théorème du moment cinétique appliqué aux couches fluides, dans le cadre de cette méthode, c'est à dire en considérant qu'aucune force extérieure n'agit sur le système formé par la Terre solide et les couches fluides :

$$\frac{d\vec{H}_{fluide}}{dt} = \vec{\Gamma}_{terre\ solide \rightarrow fluide} = -\vec{\Gamma}_{fluide \rightarrow terre\ solide} \quad (2.35)$$

L'approche des moments de force est introduite dans Bizouard (1995) et développée dans encore de Viron (1998) ou de Viron et al. (1999). Le moment de force d'interaction des couches fluides sur la Terre solide se décompose en trois termes :

- un terme de pression provient du poids de la colonne verticale d'air ou d'eau sur la surface de la Terre solide,
- un terme de gravitation est dû à l'attraction exercée par les masses atmosphériques ou océaniques sur les masses solides de la Terre,

- un terme de friction est associé aux frottements produits par les vents en surface ou par les courants marins sur le plancher océanique.

Les moments de force de pression et de gravitation se calculent par des intégrales de surface, nécessitant de connaître la pression au sol ou au fond des océans. L'expression analytique du terme de pression est :

$$\vec{\Gamma}_p = - \int_{surface} \vec{r} \times P_s \hat{n} dS \quad (2.36)$$

soit :

$$\vec{\Gamma}_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^2 h \left(\frac{\partial P_s}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\theta d\lambda \quad (2.37)$$

et celle du terme de gravitation est :

$$\vec{\Gamma}_g = \int_{volume\ de\ fluide} \vec{r} \times \vec{\nabla} \Phi \rho dV \quad (2.38)$$

soit, après l'approximation dite de "couche mince" et d'équilibre hydrostatique :

$$\vec{\Gamma}_g = \frac{a^2}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \Phi \left(\frac{\partial P_s}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\theta d\lambda \quad (2.39)$$

où \vec{r} est le rayon, P_s , la pression à la surface de la Terre solide, \hat{n} , le vecteur unitaire normal sortant à la surface de la Terre, h , la hauteur du relief par rapport au rayon équatorial a , θ et λ , la colatitude et la longitude, g , l'accélération moyenne de la pesanteur, Φ , le potentiel de gravitation terrestre, et ρ , la densité du fluide.

Quant au moment de friction, il s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_f = \int_{surface} \vec{r} (\eta \hat{n} \cdot \nabla \vec{v}_s) dS \quad (2.40)$$

où η est un paramètre de viscosité et \vec{v}_s est la vitesse relative du fluide à la surface de la Terre ou sur le plancher océanique.

Relations entre les deux méthodes

La méthode des moments de force repose sur une approche physique du problème puisque sa mise en oeuvre exige de connaître la manière dont les éléments de fluide interagissent avec les éléments de la Terre solide. Elle permet également de comprendre où, quand et comment agit le fluide à la surface du globe. En revanche, la méthode moment cinétique se passe de la physique du problème en la dissimulant derrière les transferts

globaux de moment cinétique. Bien que plus coûteuse en temps de calcul, c'est l'approche la plus utilisée car d'une part les modèles de circulation atmosphérique et océanique fournissent directement les données nécessaires à l'évaluation du moment cinétique, et d'autre part on fait l'économie de l'analyse physique de l'interaction.

Les deux méthodes sont théoriquement équivalentes et la dérivée temporelle du moment cinétique des couches fluides est en principe égal au moment de force que la Terre oppose en réaction. Des études récentes (de Viron 1998, de Viron et Dehant 1999) ont démontré que ces quantités calculées de manières indépendantes présentent un bon accord, sauf pour des périodes de 24 heures et en deçà. Le coefficient de corrélation entre dérivée du moment cinétique et moment de force chute ainsi rapidement lorsque la fréquence atteint le domaine diurne. Les facteurs de cette incohérence sont multiples. Le calcul de la dérivée temporelle du moment cinétique procure une erreur dans les hautes fréquences due au faible échantillonnage (amplification du bruit). Ensuite, les amplitudes du signal aux hautes fréquences sont naturellement faibles et le rapport signal sur bruit diminue ainsi.

2.2 Les séries d'excitation atmosphérique et océanique disponibles

2.2.1 Séries d'excitation atmosphérique

Des séries de moment cinétique atmosphérique sont rendues disponibles dans le domaine public par le Special Bureau for Atmosphere (SBA) de l'IERS (Salstein et al. 1993). Cinq modèles de circulation atmosphérique sont actuellement mis en oeuvre de façon routinière : le modèle du JMA (Japanese Meteorological Agency), le modèle de l'UKMO (United Kingdom Meteorological Office), le modèle de l'ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather-Forecast), le modèle du NCEP (National Centers for Environmental Prediction) et le modèle du NCEP/NCAR (National Centers for Environmental Prediction/National Center for Atmospheric Research). C'est ce dernier modèle qui a permis de produire la série de moment cinétique atmosphérique la plus longue et la plus homogène (Kalnay 1996, Salstein et al. 1993). Les valeurs des fonctions d'excitation y sont échantillonnées toutes les six heures et démarrent en 1948. De plus, c'est la seule série à être mise à jour régulièrement. Pour toutes ces qualités, c'est la série dont nous allons faire usage principalement dans la suite de ce travail (voir les figures 2.2 et 2.3).

Les figures 2.4 et 2.5 montrent les spectres des séries d'excitation atmosphérique pour les longues périodes dans leur version IB et NIB du modèle NCEP/NCAR Reanalysis (parties équatoriale et axiale). On remarque les pics annuels, semi-annuels et ter-annuels qui émergent du niveau de bruit ainsi que les variations d'amplitudes entre les modèles IB et NIB. Les figures 2.6 et 2.7 montrent la partie diurne (prograde puis rétrograde) du spectre. Les caractéristiques de chaque série (période couverte, échantillonnage) sont récapitulées dans la table 2.1.

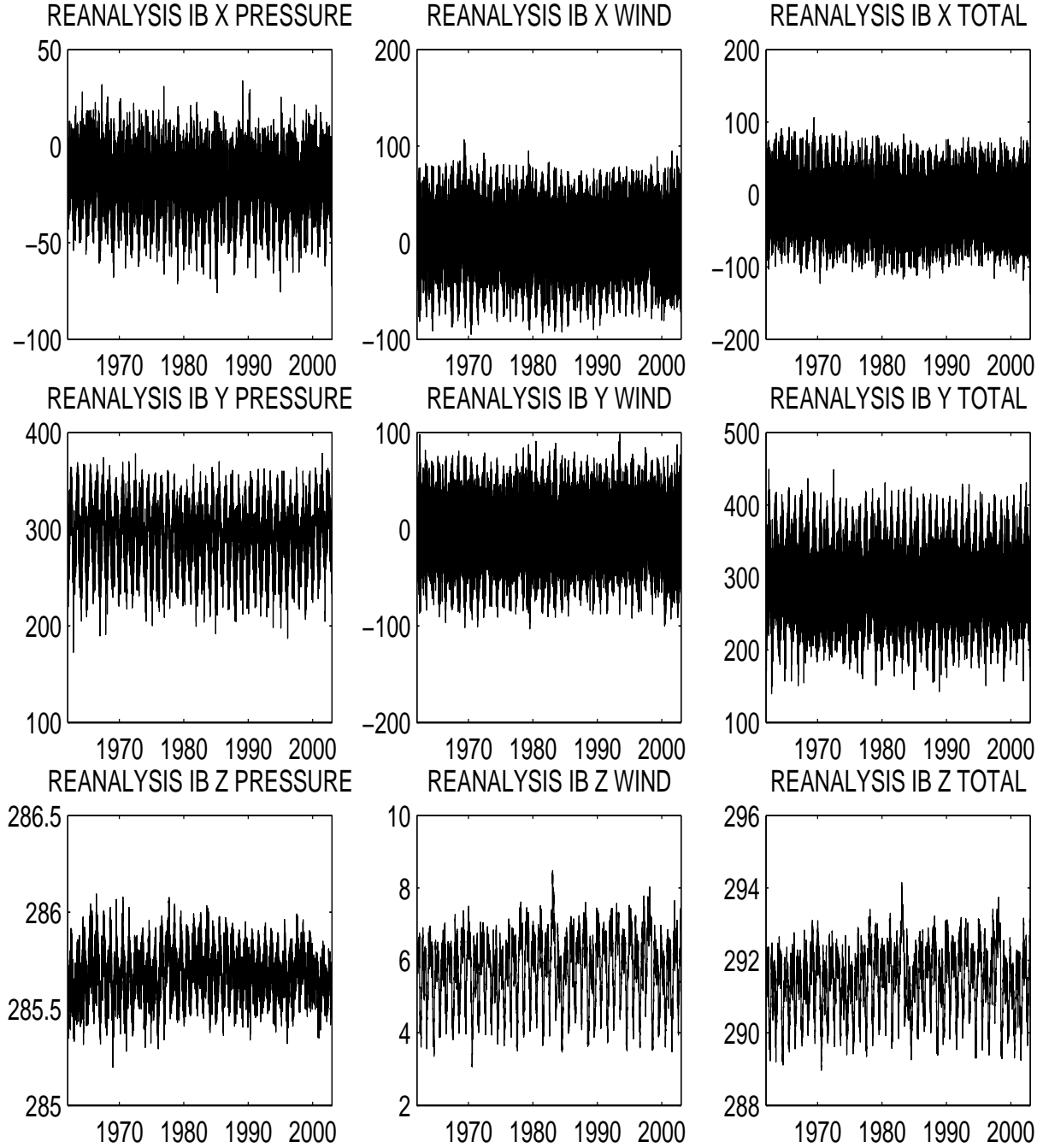


FIG. 2.2 – Séries d'excitation atmosphérique du modèle NCEP/NCAR Reanalysis entre 1962 et 2003 avec correction IB pour les trois composantes et scindée en termes de pression, vent et contribution totale pression + vent. Unité : mas

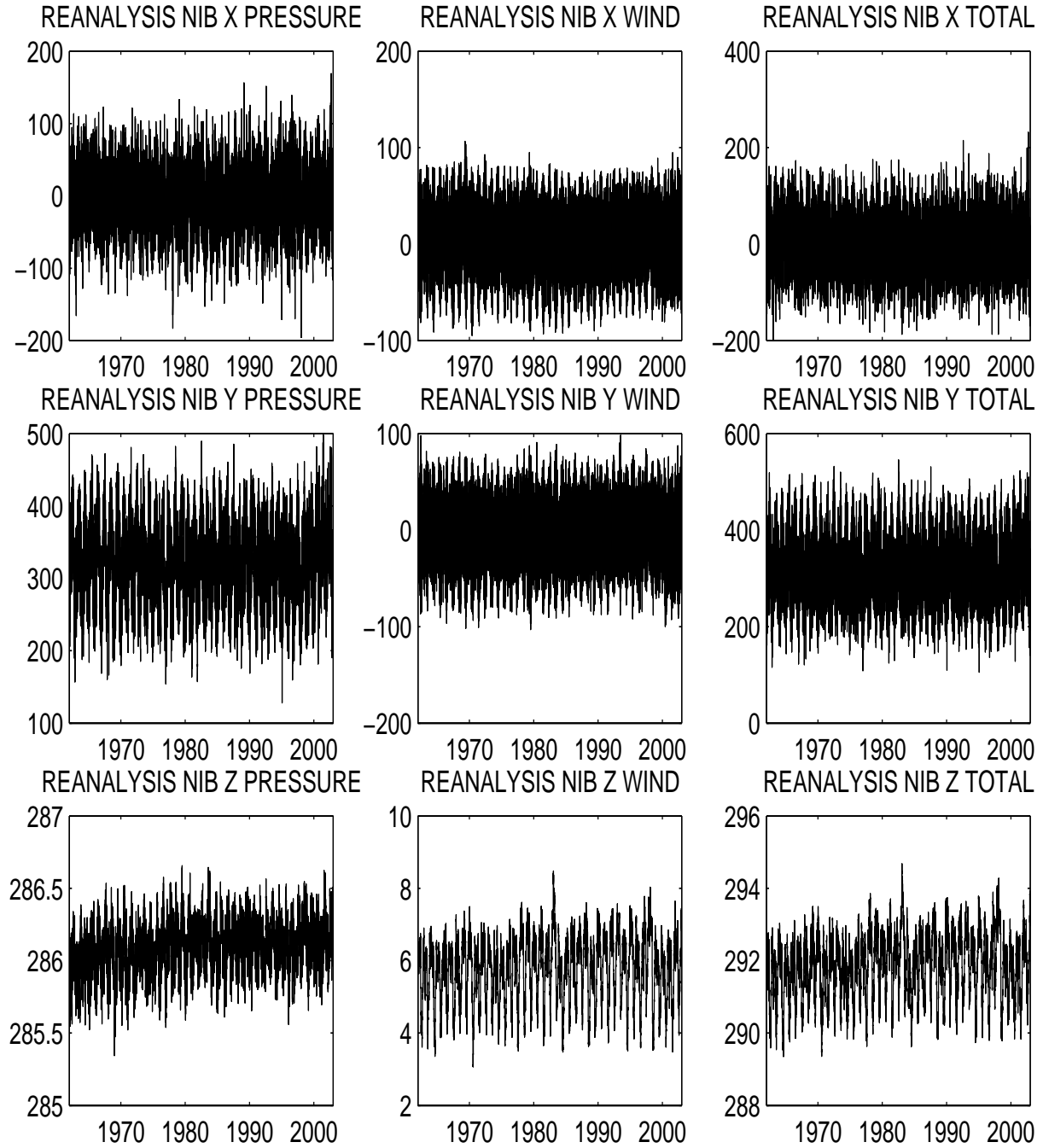


FIG. 2.3 – Séries d'excitation atmosphérique du modèle NCEP/NCAR Reanalysis entre 1962 et 2003 version NIB pour les trois composantes et scindée en termes de pression, vent et contribution totale pression + vent. Unité : mas

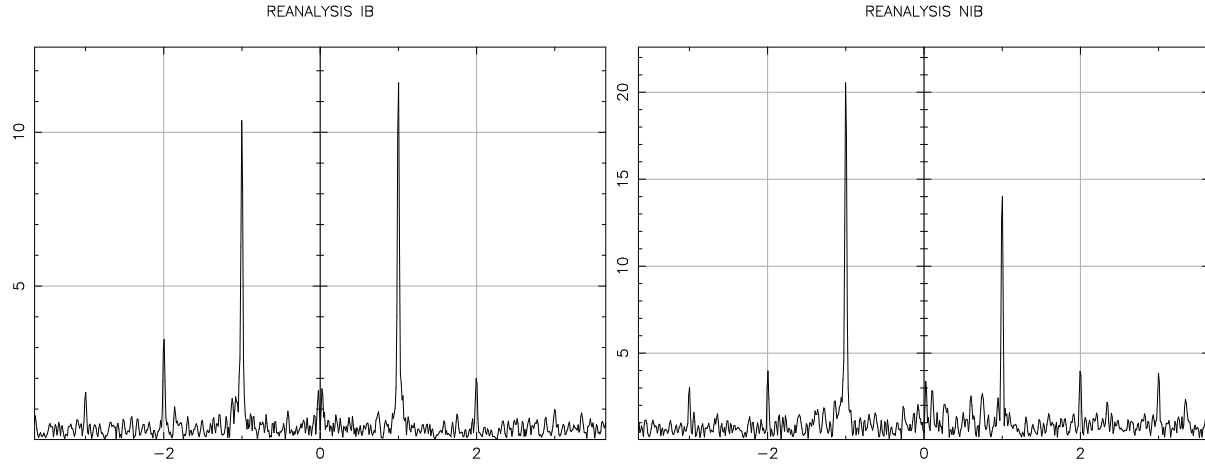


FIG. 2.4 – Spectre de Fourier complexe de la partie équatoriale des séries d’excitation atmosphérique (quantité $\chi_1 + i\chi_2$) pour les longues périodes dans leur version IB et NIB pour le modèle du NCEP/NCAR Reanalysis project. Les fréquences sont en cycles par an et les amplitudes sont en mas.

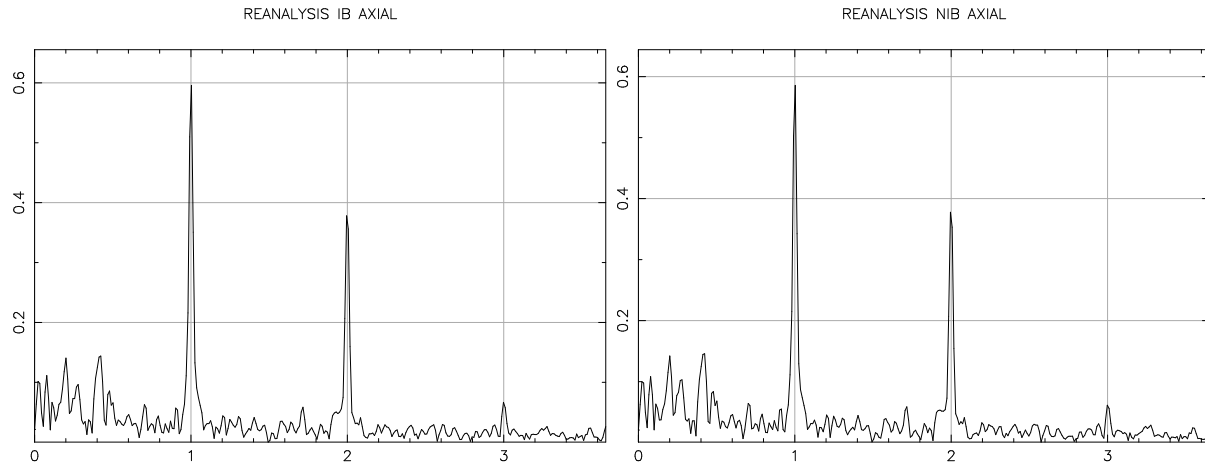


FIG. 2.5 – Spectre de Fourier de la partie axiale des séries d’excitation atmosphérique (quantité χ_3) pour les longues périodes dans leur version IB et NIB pour le modèle du NCEP/NCAR Reanalysis project. Les fréquences sont en cycles par an et les amplitudes sont en mas.

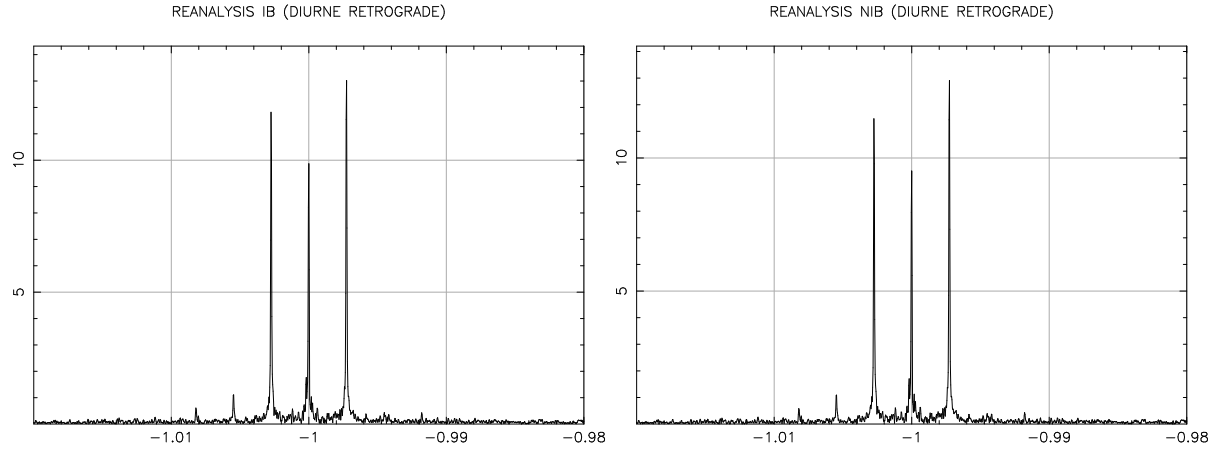


FIG. 2.6 – Spectre de Fourier complexe dans la bande diurne rétrograde de la partie équatoriale des séries d'excitation atmosphérique (quantité $\chi_1 + i\chi_2$) dans leur version IB et NIB pour le modèle du NCEP/NCAR Reanalysis project. Les fréquences sont en cycles par jour et les amplitudes sont en mas.

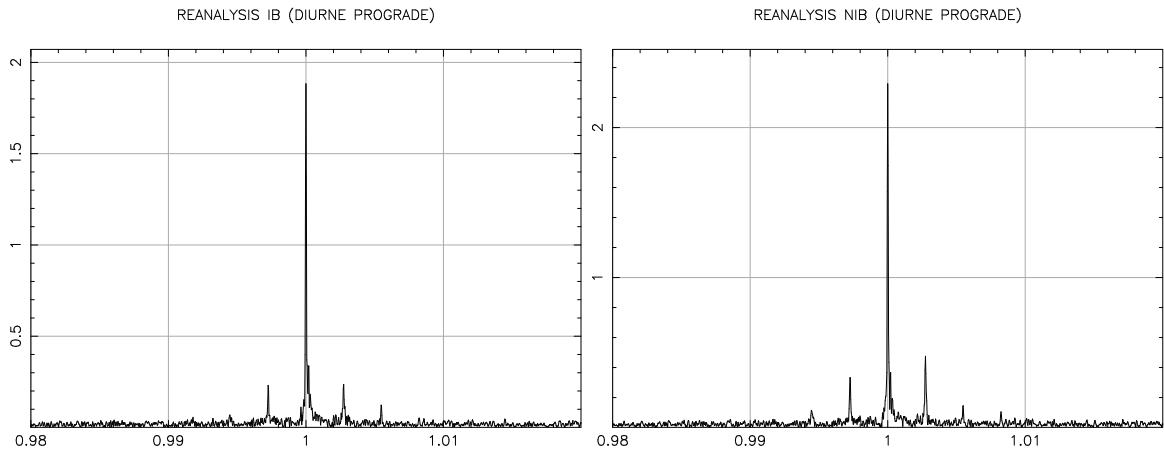


FIG. 2.7 – Spectre de Fourier complexe dans la bande diurne prograde de la partie équatoriale des séries d'excitation atmosphérique (quantité $\chi_1 + i\chi_2$) dans leur version IB et NIB pour le modèle du NCEP/NCAR Reanalysis project. Les fréquences sont en cycles par jour et les amplitudes sont en mas.

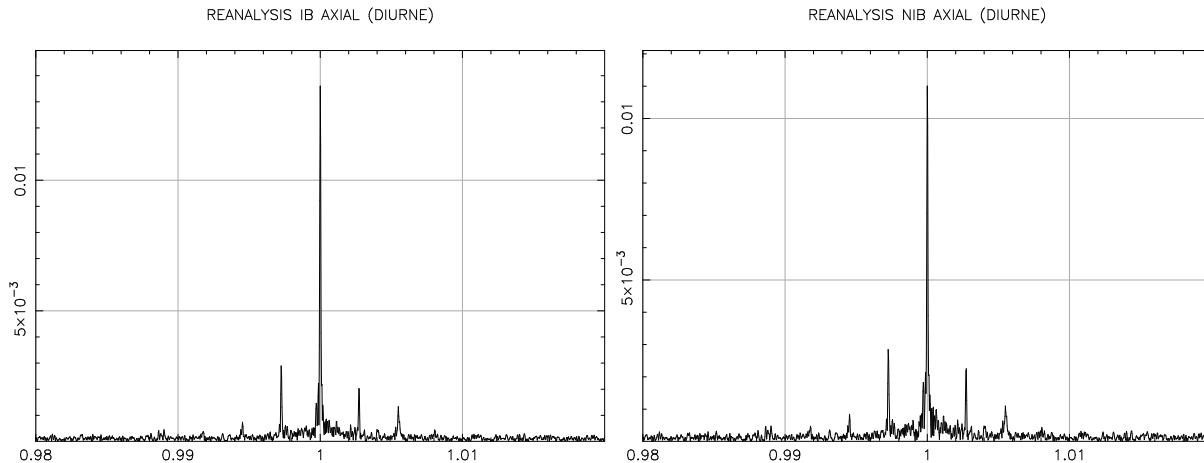


FIG. 2.8 – Spectre de Fourier de la partie axiale dans la bande diurne des séries d’excitation atmosphérique (quantité χ_3) dans leur version IB et NIB pour le modèle du NCEP/NCAR Reanalysis project. Les fréquences sont en cycles par jour et les amplitudes sont en mas.

2.2.2 Séries d’excitation océanique

Les séries de moment cinétique océanique sont peu nombreuses. Ponte et al. (1998) proposent une série couvrant 1985-1996 (échantillonnée tous les 5 jours) estimée au moyen d’un modèle de circulation océanique global (Oceanic Global Circulation Model, OGCM) forcé par les données issues du modèle atmosphérique du NCEP/NCAR Reanalysis project. Il n’y a pas d’assimilation de données océaniques, c’est à dire qu’aucune observation ne vient contraindre le modèle de circulation (à la différence des modèles atmosphériques qui, eux, sont contraints par des grilles d’observations). Johnson et al. (1999) proposent une autre série couvrant 1988-1998 provenant d’un modèle de circulation différent (Parallel Ocean Climate Model, POCM) et forcée par les données atmosphériques du ECMWF sans assimilation de données d’observation. Récemment, R. S. Gross a publié une nouvelle série basée sur le modèle de circulation ECCO du MIT, et couvrant 1980 à 2002 avec un point par jour (Gross 2003a, 2003b). Cette série est forcée, comme la série de Ponte et al. (1998), par le NCEP/NCAR et ne prend en compte aucune donnée d’observation. Ces trois séries sont dans le domaine public sur le site web du Special Bureau for Oceans de l’IERS (direction assurée par R. S. Gross, JPL). Enfin, une quatrième série (Ponte 2002, communication personnelle) dont l’utilisation reste privée couvre la période 1950-2000 à raison d’un point par mois et est issue d’un modèle de circulation globale développé par le NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration, USA) Geophysical Fluid Dynamics Laboratory forcé par des données océaniques et le modèle atmosphérique du NCEP/NCAR. Les séries existantes sont récapitulées dans la table 2.2.

2.2.3 Cohérence entre les différentes séries

Les séries de moment cinétique atmosphérique sont cohérentes entre elles à basses fréquences pour des périodes supérieures à 5 jours (de Viron et Dehant 1999). La corrélation est alors supérieure à 0.95. Toutefois, cette corrélation chute rapidement lorsqu’on s’intéresse aux hautes fréquences (périodes inférieures à deux jours). Pour évaluer les effets at-

TAB. 2.1 – Caractéristiques de chaque série d’excitation atmosphérique. La mention ”irrégulière” signifie soit que la série modifie son pas d’échantillonnage au cours du temps, soit qu’il manque les valeurs pour certaines dates.

Série	Echantillonnage (jour)	Période couverte (année / <i>mjd</i>)
NCEP/NCAR Reanalysis	0.25	1948.00 - <i>32551.00</i> -
ECMWF	0.25 (irrégulière)	1993.25 - 1997.25 <i>49078.00 - 50538.75</i>
JMA	0.25 (irrégulière)	1993.25 - 2001.00 <i>49078.00 - 51908.75</i>
NCEP	1 (irrégulière)	1976.50 - 2000.01 <i>42960.00 - 51547.75</i>
UKMO	1 (irrégulière)	1986.90 - 2000.01 <i>46761.00 - 51547.00</i>

TAB. 2.2 – Caractéristiques de chaque série d’excitation océanique.

Série	Echantillonnage (jour)	Période couverte (année / <i>mjd</i>)
Ponte et al. 1998	5	1985.01 - 1996.35 <i>46069.50 - 50209.50</i>
Johnson et al. 1999	3	1988.00 - 1998.00 <i>47161.00 - 50812.00</i>
Ponte 2002	30.44	1950.00 - 1999.92 <i>33282.00 - 51514.06</i>
Gross 2003	1	1980.00 - 2002.25 <i>44240.00 - 52364.00</i>

TAB. 2.3 – Cohérence entre les séries d’excitation océanique testée sur le terme annuel et sur la période commune à ces 4 séries : 1988-1996. Amplitudes en mas et phases en degrés.

	équatorial +365.25		équatorial -365.25		axial 365.25	
Ponte et al. 1998	7.5	62°	7.2	88°	0.04	121°
Johnson et al. 1999	6.0	118°	5.3	20°	7.12	181°
Ponte 2002	2.7	3°	2.6	81°	-	-
Gross 2003	6.2	63°	6.1	86°	0.03	145°

mosphériques sur le mouvement du pôle à basses fréquences, nous choisissons d’utiliser la série la plus longue et la plus homogène tout en sachant que les autres modèles donneraient des résultats similaires. A l’inverse le calcul est beaucoup plus délicat pour l’effet sur les nutations puisque celui-ci fait appel à la partie diurne du spectre et l’on peut s’attendre à de fortes différences d’un modèle à l’autre comme le notent Yseboodt et al. (2002).

Les séries océaniques présentent des différences notables d’un modèle à l’autre ou d’un traitement à l’autre. La comparaison des termes principaux (saisonniers) sur un intervalle de temps commun 1988-1996 montre des disparités en amplitudes et en phase. La table 2.3 montre ainsi les valeurs des amplitudes et phases du terme annuel pour les séries de Ponte et al. (1998), Johnson et al. (1999), Ponte (2002) et Gross (2003), sur la composante équatoriale et la composante axiale. Ces différences rendent délicate l’évaluation des effets océaniques sur la rotation terrestre et ne peuvent trouver leur explication que dans les différences entre les modèles de circulation utilisés et dans l’absence ou la présence d’assimilation de données d’observation. Notons que deux séries sont cohérentes entre elles sur la période de temps commune 1988-1996 : Ponte et al. (1998) et Gross (2003). Rappelons que ces deux séries ont en commun un modèle de circulation global et le modèle atmosphérique de forçage. Ce modèle de forçage étant le NCEP/NCAR Reanalysis, il est cohérent d’étudier les effets combinés atmosphère + océans avec ce même modèle.

2.3 Bilan des effets atmosphériques et océaniques sur l’orientation de la Terre

2.3.1 Effets sur le mouvement du pôle

Ce paragraphe apporte une synthèse de nos études sur l’excitation du mouvement du pôle pour les basses fréquences par la combinaison des excitations de l’atmosphère et des océans, via la méthode du moment cinétique (Bizouard et Lambert 2001, 2002b). Ces études sont basées sur une juxtaposition entre le modèle NCEP/NCAR Reanalysis pour l’atmosphère et la série océanique de Ponte et al. (1998). Nous avons complété ce travail en ajoutant l’étude avec la série océanique de Gross (2003a, 2003b) couvrant une période plus longue.

Nous nous intéressons aux basses fréquences (dans le repère terrestre), c'est à dire aux périodes éloignées de la période de rotation diurne au moins supérieures à 10 jours. Dans ce domaine, la relation cinématique (2.10) entre l'axe instantané de rotation et coordonnées du CIP dans le repère terrestre introduite dans l'expression (2.33) donne :

$$p + \frac{i}{\sigma_{cw}} \dot{p} = \chi^{eff} \quad (2.41)$$

Le membre de gauche de cette équation constitue l'excitation géodésique équatoriale :

$$\chi_G = p + \frac{i}{\sigma_{cw}} \dot{p} \quad (2.42)$$

que l'on doit donc comparer à l'excitation géophysique équatoriale, ou excitation des couches fluides χ_F (membre de droite) comprenant l'excitation atmosphérique χ_A et l'excitation océanique χ_O .

Le calcul de l'excitation géophysique dans le domaine du temps à partir de données discrètes repose sur une manipulation numérique (dérivée temporelle) et sur le choix d'une fréquence de Chandler σ_{cw} . Cette fréquence correspond à la fréquence de résonance d'un oscillateur amorti et s'écrit sous forme complexe :

$$\sigma_{cw} = \sigma_0(1 + i/2Q) \quad (2.43)$$

où σ_0 est une valeur réelle et Q le facteur de qualité (qui marque l'amortissement du système). Les valeurs de σ_0 et Q prises dans les études récentes varient. Gross (2000a) prend les valeurs de Wilson et Vicente (1990), $\sigma_0 = 0.8435$ cpa (cycles par an), $Q = 179$. Brzeziński et al. (2003) prennent $\sigma_0 = 0.8430$ cpa, $Q = 175$ (Wilson et Vicente 1980). Brzeziński et Nastula (2002) prennent des valeurs dérivées par Brzeziński et al. (2002) à partir des séries POLE98 du JPL (Gross 2000b), soit $\sigma_0 = 0.8434$ cpa et $Q = 147$. Wünsch (2000) a utilisé les valeurs de Jochmann (1999), $\sigma_0 = 0.8416$ cpa et $Q = 50$. Nous avons adopté une valeur élevée du facteur de qualité $Q = 179$ correspondant à l'estimation la plus récente de Wilson et Vicente (1990). Nous avons pris une fréquence de Chandler de 0.8435 cpa (soit une période de 433 jours).

Nous avons dérivé l'excitation géodésique à partir des données de mouvement du pôle de l'IERS (série IERS C04). L'excitation atmosphérique utilisée dans l'étude est celle du NCEP/NCAR Reanalysis project déjà décrite plus haut. Nous utilisons l'approximation dite du baromètre inverse (IB). Les séries de moment cinétique océanique, converties en excitation selon les relations (2.30) et (2.31), sont celle de Ponte et al. (1998) couvrant la période 1985.0-1996.3 et celle de Gross (2003a, 2003b) couvrant 1980.0-2002.3.

L'échantillonnage des séries d'excitation géodésique et atmosphérique a été calqué sur celui de la série océanique. Le filtrage et l'interpolation nécessaires à cette opération ont été réalisés par application d'un filtre gaussien de période de demi-coupure de 10 jours,

éliminant les hautes fréquences, et interpolation par polynômes de Lagrange d'ordre 4. Les séries obtenues sont tracées avec leur spectre de Fourier sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11. La figure 2.12 montre la combinaison de l'excitation atmosphérique avec l'excitation océanique. Les comparaisons dans le domaine du temps entre l'excitation géodésique et celle des couches fluides sont représentées sur la figure 2.13, après avoir retiré une tendance à chacune des séries par filtrage gaussien avec une période de demi-coupure de 600 jours.

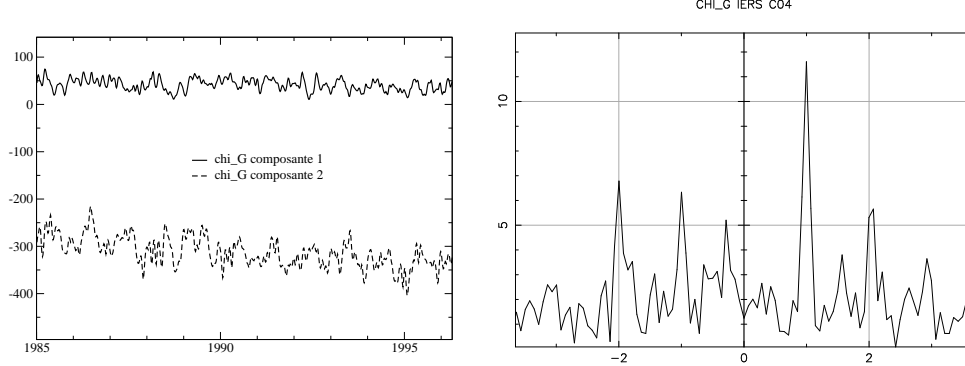


FIG. 2.9 – Excitation géodésique équatoriale (χ_G , IERS C04) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

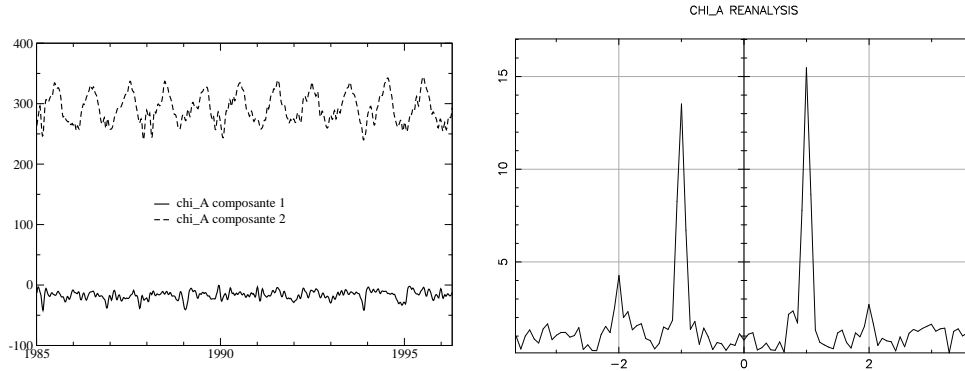


FIG. 2.10 – Excitation atmosphérique équatoriale (χ_A , NCEP/NCAR Reanalysis project) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

Les coefficients de corrélation entre les séries d'excitation géodésique et géophysiques sont calculés selon la formule générale, pour deux séries temporelles X et Y :

$$C(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_{XX}\sigma_{YY}} \quad (2.44)$$

où la covariance σ^2 est :

$$\sigma_{XY}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (2.45)$$

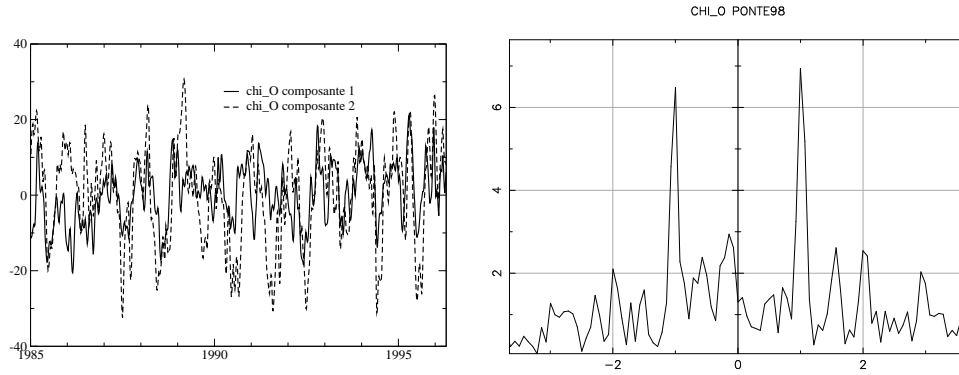


FIG. 2.11 – Excitation océanique équatoriale (χ_O , Ponte et al. 1998) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

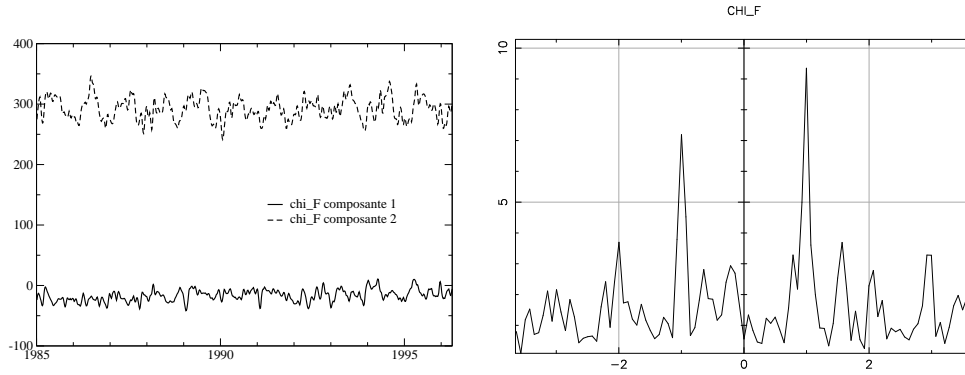


FIG. 2.12 – Excitation totale atmosphérique + océanique équatoriale (χ_F) en mas entre 1985.0 et 1996.3. Les amplitudes du spectre sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa).

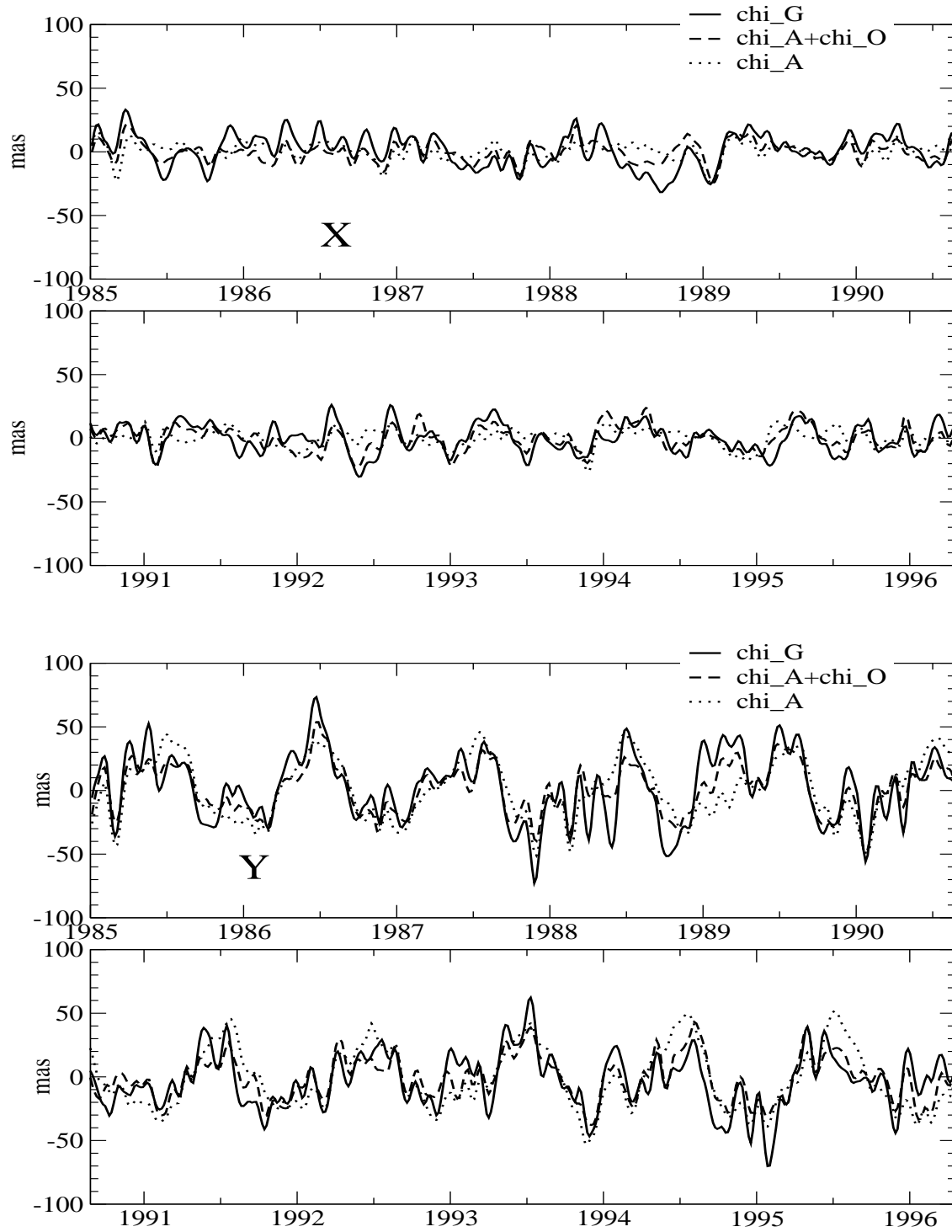


FIG. 2.13 – Comparaison dans le domaine du temps des séries d'excitation géodésique, atmosphérique + océanique et atmosphérique seule pour la composante x (en haut) et y (en bas).

TAB. 2.4 – Coefficients de corrélation entre l’excitation géodésique et les excitations atmosphérique (NCEP/NCAR) et océanique.

	1985.0-1996.3		1980.0-2002.3	
	Ponte et al. 1998		Gross 2003	
	(χ_G, χ_A)	(χ_G, χ_F)	(χ_G, χ_A)	(χ_G, χ_F)
X	0.29	0.55	0.21	0.60
Y	0.49	0.68	0.52	0.53

\bar{X} et \bar{Y} désignant les valeurs moyennes de séries X et Y , et sont reportés dans la table 2.4. On note une amélioration importante de la corrélation qui franchit ainsi la barre des 0.5 si l’on ajoute les effets océaniques. L’effet est spectaculaire sur la composante x pour laquelle l’amélioration est de près de 90% avec la série de Ponte, et de 185% avec celle de Gross. Elle est de 39% pour la composante y avec la série de Ponte.

Pour quantifier l’effet moyen, sur un intervalle de temps donné, de l’atmosphère ou de l’océan sur le mouvement du pôle, nous avons estimé par moindres carrés les amplitudes des termes principaux dans les fonctions d’excitation : annuels, semi-annuels et ter-annuels, progrades et rétrogrades. Le modèle à ajuster sur les observations χ complexes s’écrit :

$$\begin{aligned}
\chi &= \chi_1 + i\chi_2 \\
&= \sum_j C_j e^{i\omega_j(t-t_0)} + at + b \\
&= \sum_j A_j e^{i(\omega_j(t-t_0)+\phi_j)} + at + b
\end{aligned} \tag{2.46}$$

où C_j est l’amplitude complexe pour le terme de fréquence ω_j . La donnée de C_j est équivalente à la donnée d’une amplitude réelle A_j et d’une phase ϕ_j rapportée à une date fixe. En pratique, le modèle s’écrit :

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= A^{(ip)} \cos(\omega t) - A^{(op)} \sin(\omega t) \\
\chi_2 &= A^{(ip)} \sin(\omega t) + A^{(op)} \cos(\omega t)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

où les amplitudes A sont toutes réelles et les exposants (ip) sont mis pour ”in-phase,” désignant le terme en phase (ici, le terme en cosinus de la première composante) et (op) sont mis pour ”out-of-phase,” terme hors-phase³ (ici, le terme en sinus de la première composante). Les estimations effectuées sur la période 1985.0-1996.3 avec la série de Ponte et sur la période 1980.0-2002.3 avec la série de Gross sont reportées dans la table 2.5. Une représentation plus intuitive sous forme de vecteurs dans le plan complexe (figures 2.14 et 2.15) permet d’apprécier le bilan de moment cinétique du système Terre solide + atmosphère + océans.

³Ou plus exactement en quadrature de phase.

TAB. 2.5 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans les excitations géodésiques, atmosphériques et océaniques : amplitudes en mas et phases rapportées à l'époque J2000.0. Première ligne : période 1985.0-1996.3 et série océanique de Ponte et al. (1998). Seconde ligne : période 1980.0-2002.3 et série océanique de Gross (2003a, 2003b).

		χ_G		χ_A		χ_O		χ_F	
cpa		mas		mas		mas		mas	
+1	Ponte98	13.22	-65.60°	16.47	265.77°	6.89	60.97°	10.62	-78.45°
	Gross03	14.80	-60.32°	16.02	268.39°	5.65	54.83°	11.74	-76.17°
-1	Ponte98	6.95	236.61°	14.43	260.62°	6.78	88.69°	7.78	253.58°
	Gross03	7.48	236.93°	14.21	259.59°	4.68	85.52°	9.56	256.69°
+2	Ponte98	5.39	96.28°	2.99	49.40°	2.55	178.79°	2.40	104.46°
	Gross03	5.12	109.00°	2.77	47.36°	2.03	159.61°	2.75	90.57°
-2	Ponte98	6.37	127.21°	4.63	110.42°	2.36	240.75°	3.59	140.53°
	Gross03	5.46	125.87°	4.25	115.06°	2.44	222.39°	4.22	148.78°
+3	Ponte98	2.81	107.15°	1.56	145.20°	1.57	108.90°	2.97	127.00°
	Gross03	1.86	109.78°	1.07	149.36°	1.40	126.19°	2.41	136.20°
-3	Ponte98	3.09	-26.44°	1.53	6.95°	1.36	-39.05°	2.66	-14.65°
	Gross03	3.23	-49.85°	2.10	-8.82°	1.45	-77.27°	2.96	-35.91°

Les valeurs obtenues ne sont toutefois que des grandeurs "abstraites" (l'excitation) et ne reflétant pas la position terrestre du CIP. Celle-ci peut être déterminée en inversant l'équation (2.41) dans le domaine des fréquences :

$$p(\sigma) \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{cw}}\right) = \chi(\sigma) \quad (2.48)$$

Les contributions atmosphériques et océaniques pour la position du CIP sont reportées dans la table 2.6.

2.3.2 Effets sur la longueur du jour

Les variations de la longueur du jour sont déduites de l'équation (2.23) :

$$\frac{\Delta LOD}{LOD} = \chi_3 = \frac{h_3}{C\Omega} + \frac{c_{33}}{C} \quad (2.49)$$

Dans le membre de droite, le premier terme est purement l'incrément du moment cinétique axial de la couche fluide puisqu'il provient de l'intégration de la variation \dot{h}_3 . Le

TAB. 2.6 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels rapportés au mouvement du pôle : amplitudes en mas et phases rapportées à l'époque J2000.0. Première ligne : période 1985.0-1996.3 et série océanique de Ponte et al. (1998). Seconde ligne : période 1980.0-2002.3 et série océanique de Gross (2003a, 2003b).

		p_G		p_A		p_O		p_F	
cpa		mas		mas		mas		mas	
+1	Ponte98	71.26	115.42°	88.78	86.79°	37.14	241.99°	57.25	102.57°
	Gross03	79.78	120.70°	86.36	89.41°	30.46	235.85°	63.29	104.85°
-1	Ponte98	3.18	236.70°	6.60	260.71°	3.10	88.78°	3.56	253.67°
	Gross03	3.42	237.02°	6.50	259.68°	2.14	85.61°	4.37	256.78°
+2	Ponte98	3.93	-83.44°	2.18	229.68°	1.86	-0.93°	1.75	-75.26°
	Gross03	3.74	-70.72°	2.02	227.64°	1.48	-20.11°	2.01	-89.15°
-2	Ponte98	1.89	127.32°	1.37	110.53°	0.70	240.86°	1.07	140.64°
	Gross03	1.62	125.98°	1.26	115.17°	0.72	222.50°	1.25	148.89°
+3	Ponte98	1.10	-72.63°	0.61	-34.58°	0.61	-70.88°	1.16	-52.78°
	Gross03	0.73	-70.00°	0.42	-30.42°	0.55	-53.58°	0.94	-43.58°
-3	Ponte98	0.68	-26.32°	0.34	7.08°	0.30	-38.93°	0.58	-14.44°
	Gross03	0.71	-49.73°	0.46	-8.70°	0.32	-77.15°	0.65	-35.79°

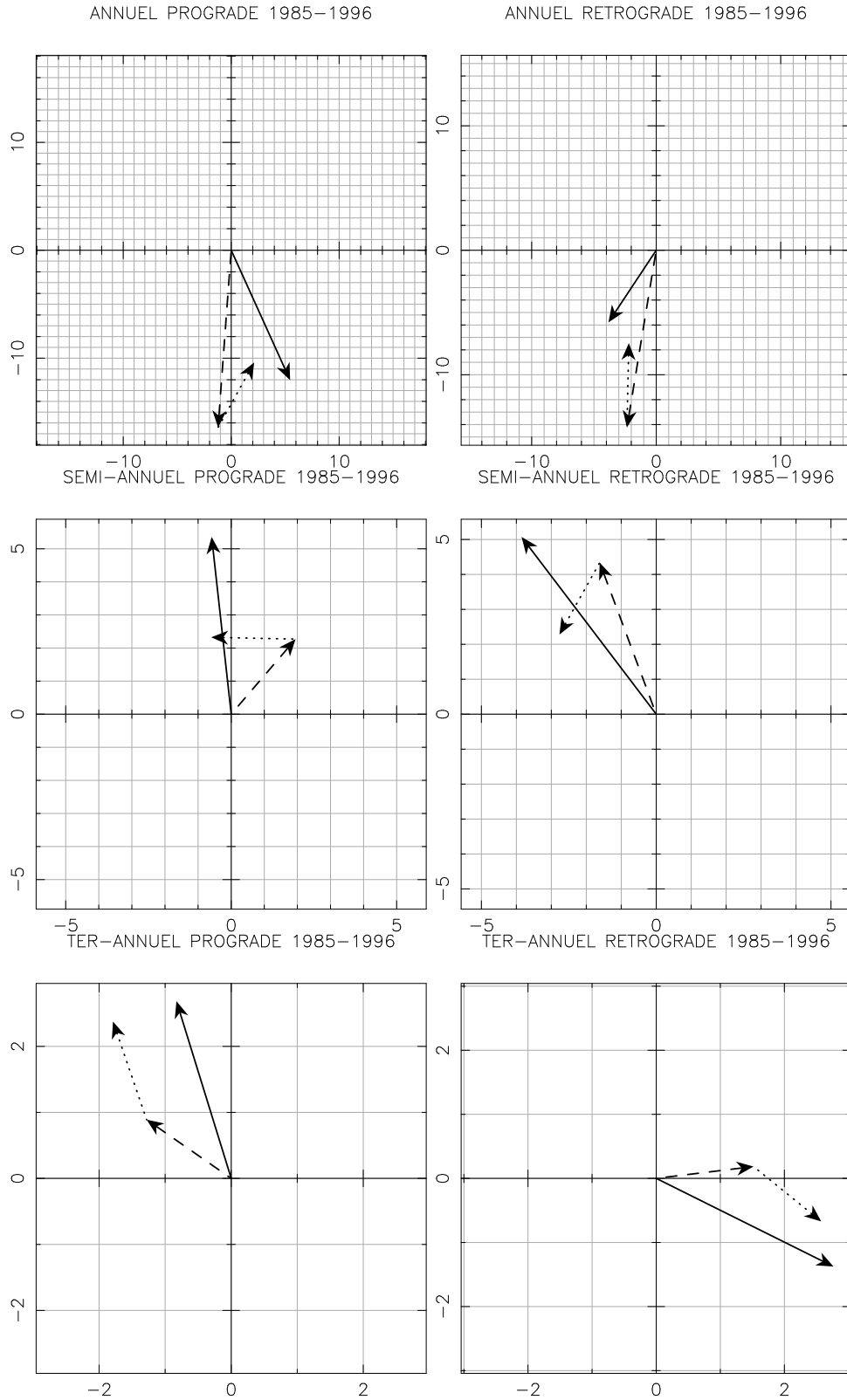


FIG. 2.14 – Bilan de moment cinétique entre 1985.0 et 1996.3 sous forme de vecteurs dans le plan complexe. Trait plein : χ_G , semi-plein : χ_A , pointillés : χ_O (Ponte et al. 1998).

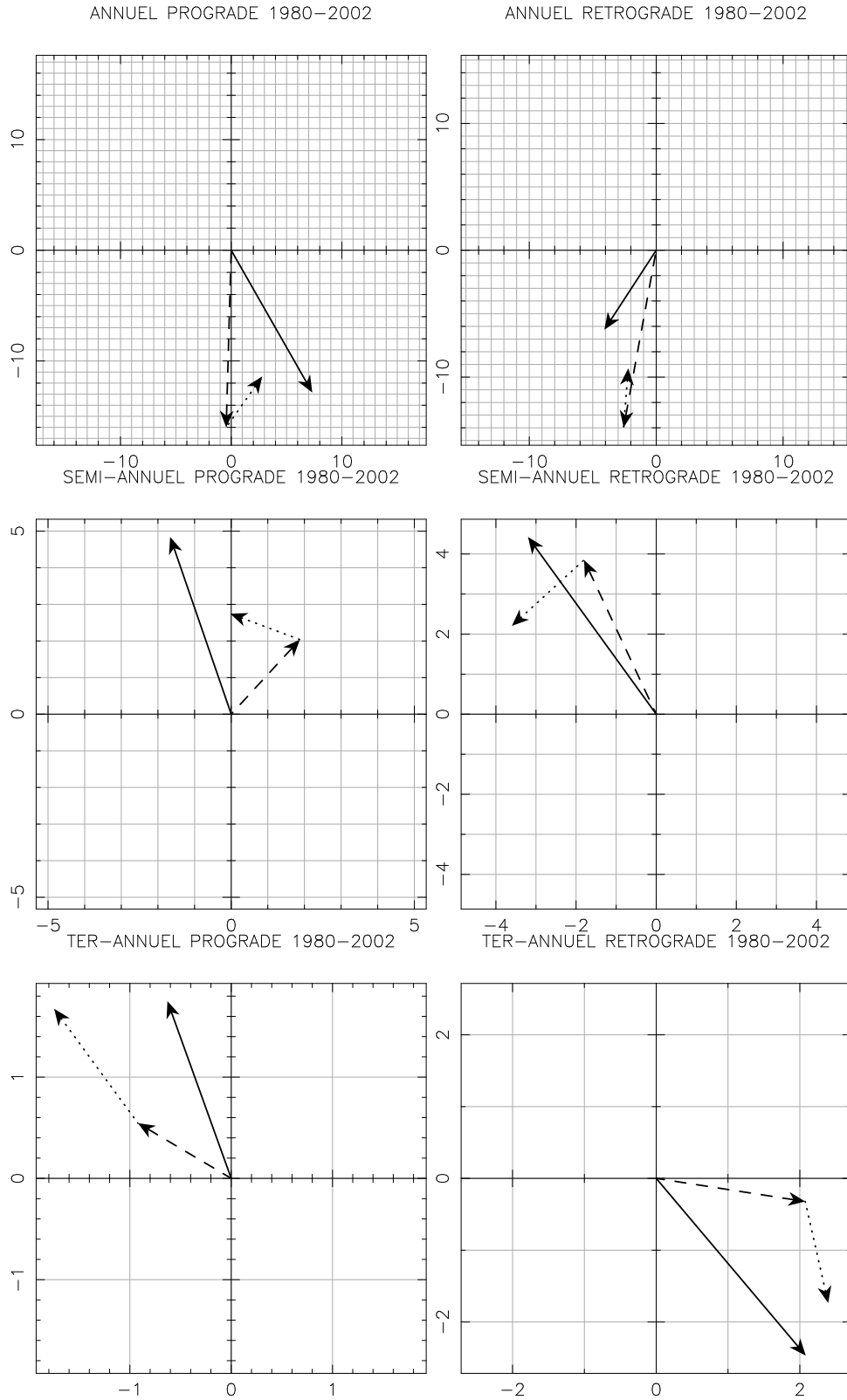


FIG. 2.15 – Bilan de moment cinétique entre 1980.0 et 2002.3 sous forme de vecteurs dans le plan complexe. Trait plein : χ_G , semi-plein : χ_A , pointillés : χ_O (Gross 2003).

second terme c_{33}/C n'est autre que le rapport de l'incrément du moment d'inertie axial au moment d'inertie axial moyen, soit $\delta C/C$. Ces variations sont proportionnelles aux variations de l'ellipticité dynamique $(C - A)/A$. Une partie du c_{33} provient des marées zonales, variations provoquées par le champ de gravitation lunisolaire qui étire plus ou moins le bourrelet équatorial de la Terre élastique, et qui sont bien modélisées (voir Chapitre 3 de ce rapport). Les autres contributions au c_{33} proviennent de l'atmosphère et de l'océan.

La variation de la longueur du jour est donc la somme d'un effet "prédictible," celui des marées zonales, et d'un effet provenant des couches fluides. En retirant les effets prédictibles et la tendance à long terme (termes décennaux dont l'amplitude est voisine de 5 ms), nous pouvons comparer la fonction d'excitation atmosphérique χ_3 et les variations du LOD qui lui seraient imputées (figure 2.16). Nous faisons cette comparaison sur la totalité des données disponibles pour la série IERS C04, c'est à dire depuis 1962.0. Le coefficient de corrélation entre les deux séries est très élevé, 0.93, ce qui indique que l'atmosphère est presque entièrement responsable des fluctuations du LOD, hormis les effets prédictibles des marées zonales et les fluctuations décennales. En utilisant une méthode d'estimation par moindres carrés similaire à celle utilisée pour l'étude des termes saisonniers du mouvement du pôle (ici, notre modèle est sous la forme $A \cos(\sigma t + \phi)$), nous avons comparé les amplitudes des termes saisonniers. Les valeurs sont reportées dans la table 2.7. Les différences inexpliquées ne dépassent pas 0.05 ms.

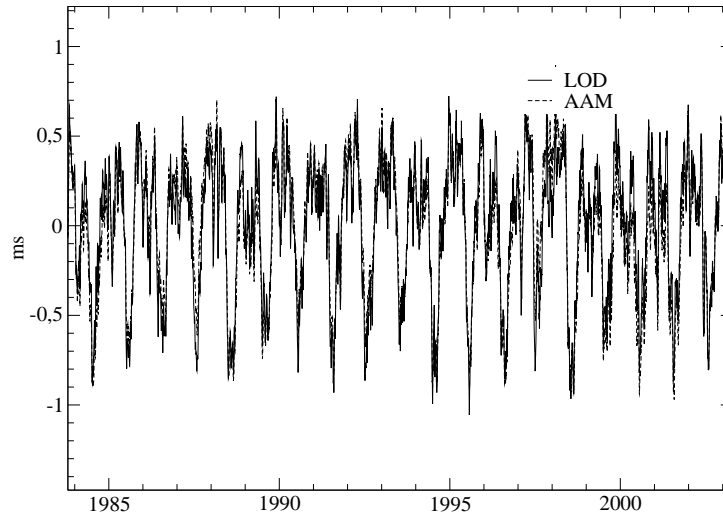


FIG. 2.16 – Comparaison entre les variations du LOD (marées zonales et tendance retirées) et celles du moment cinétique atmosphérique depuis 1962.0.

2.3.3 Effets sur la nutation

La nutation est excitée par la partie rétrograde diurne (dans le repère tournant) du moment cinétique de la couche fluide. Nous pouvons dès maintenant exclure l'évaluation

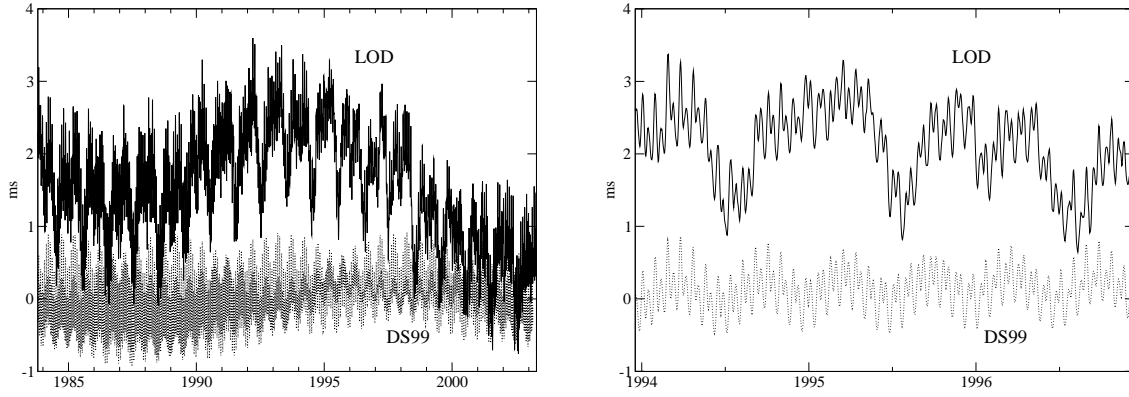


FIG. 2.17 – Variation de la durée du jour (série IERS C04) et effet des marées zonales à partir du modèle de Defraigne et Smits 1999 (DS99). A droite, zoom sur les variations saisonnières.

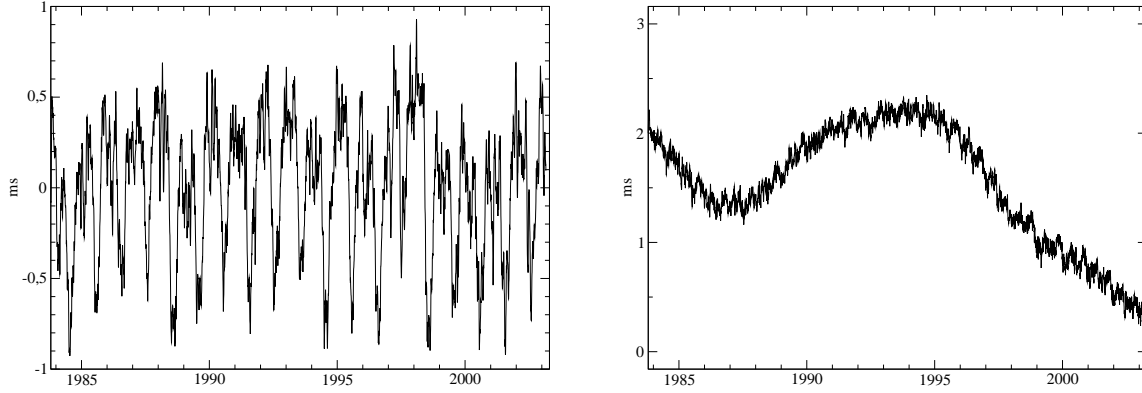


FIG. 2.18 – A gauche, variation de l'excitation atmosphérique axiale (NCEP/NCAR Reanalysis), l'effet séculaire (terme constant et linéaire) ayant été retiré. A droite, variation de la durée du jour (série IERS C04) résiduelle après avoir retiré les marées zonales (modèle de Defraigne et Smits 1999) et l'excitation atmosphérique.

TAB. 2.7 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans l'excès de LOD (marées zonales et tendance retirées) et l'excitation atmosphérique depuis 1962.0 : amplitudes en ms et phases rapportées à l'époque J2000.0.

cpa	ΔLOD		$\chi_3 \times \overline{LOD}$	
	ms		ms	
1	0.34	-30.99°	0.35	-34.26°
2	0.29	117.71°	0.24	110.78°
3	0.04	-32.24°	0.04	-37.79°

des effets engendrés par un modèle dynamique d'océan puisque les séries océaniques publiées ne présentent pas une résolution temporelle suffisante. Aussi, ce paragraphe ne sera consacré qu'aux effets atmosphériques avec un modèle d'océan statique.

Nous avons évoqué plus haut le problème de l'interaction entre l'atmosphère et l'océan. Nous avons vu qu'à hautes fréquences, et donc dans la bande diurne, on pouvait considérer en première approche l'océan comme non-réactif aux changements de pression atmosphérique et qu'un incrément de force exercé par l'atmosphère sur la surface liquide était intégralement transmise au plancher océanique. Ceci constitue l'hypothèse non-baromètre inverse (NIB). Nous utiliserons donc des séries d'excitation atmosphérique dans leur version NIB.

Il est pratique d'utiliser les fonctions d'excitation calculées dans le repère céleste (Celestial Effective Angular Momentum, CEAM) par la relation (Brzeziński 1994) :

$$\chi' = -\chi e^{i\Phi} \quad (2.50)$$

où Φ est le temps sidéral de Greenwich qui peut s'écrire en fonction de la vitesse de rotation sidérale de la Terre Ω et d'une phase rattachée à une époque de référence t_0 :

$$\Phi = \Omega(t - t_0) + \Phi_0 \quad (2.51)$$

Cette relation transforme toutes les ondes rétrogrades diurnes en ondes à longues périodes. Ainsi, l'onde nommée π_1 , de période 1.0054 jour solaire dans la Terre, devient une onde ter-annuelle dans l'espace. L'onde P_1 , de période 1.0027 jour dans la Terre, donne naissance à l'onde semi-annuelle dans l'espace. L'onde solaire S_1 de période un jour solaire devient une onde annuelle. L'onde sidérale K_1 , de période un jour sidéral (0.9973 jour) devient de période infinie dans l'espace. Enfin, l'onde ψ_1 , de période 0.9946 jour dans la Terre, donne l'onde rétrograde annuelle dans l'espace.

Soit $P = dX + idY = \Delta\psi \sin \epsilon_0 + i\Delta\epsilon$ les composantes du CIP dans le plan équatorial vrai en notation complexe. Les incréments correspondants aux effets atmosphériques s'expriment dans le domaine des fréquences au moyen d'une fonction de transfert reliant l'amplitude de l'excitation géophysique (scindée en une composante de pression et une composante de vent) et l'amplitude de la nutation (Brzeziński 1994) :

$$P(\sigma') = T_p(\sigma')\chi'_p(\sigma') + T_v(\sigma')\chi'_v(\sigma') \quad (2.52)$$

où $\sigma' = \sigma + \Omega$ est la fréquence calculée dans l'espace, et où la fonction de transfert, différente pour la partie pression et la partie vent, est donnée par :

$$T_{p,v}(\sigma') = \sigma_c \left(\frac{1}{\sigma'_c - \sigma'} + \frac{a_{p,v}}{\sigma'_f - \sigma'} \right) \quad (2.53)$$

Les fréquences σ'_c et σ'_f sont respectivement la fréquence de Chandler et la fréquence de nutation libre du noyau (FCN), toutes deux comptées dans l'espace. σ_c est la fréquence de Chandler comptée dans la Terre ($\sigma'_c = \sigma_c + \Omega$). Les valeurs des coefficients sans dimension a_p et a_v sont données dans Bizouard et al. (1998) ou dans Brzeziński et al. (2002) : $a_p = 9.509 \times 10^{-2}$ et $a_v = 5.489 \times 10^{-4}$.

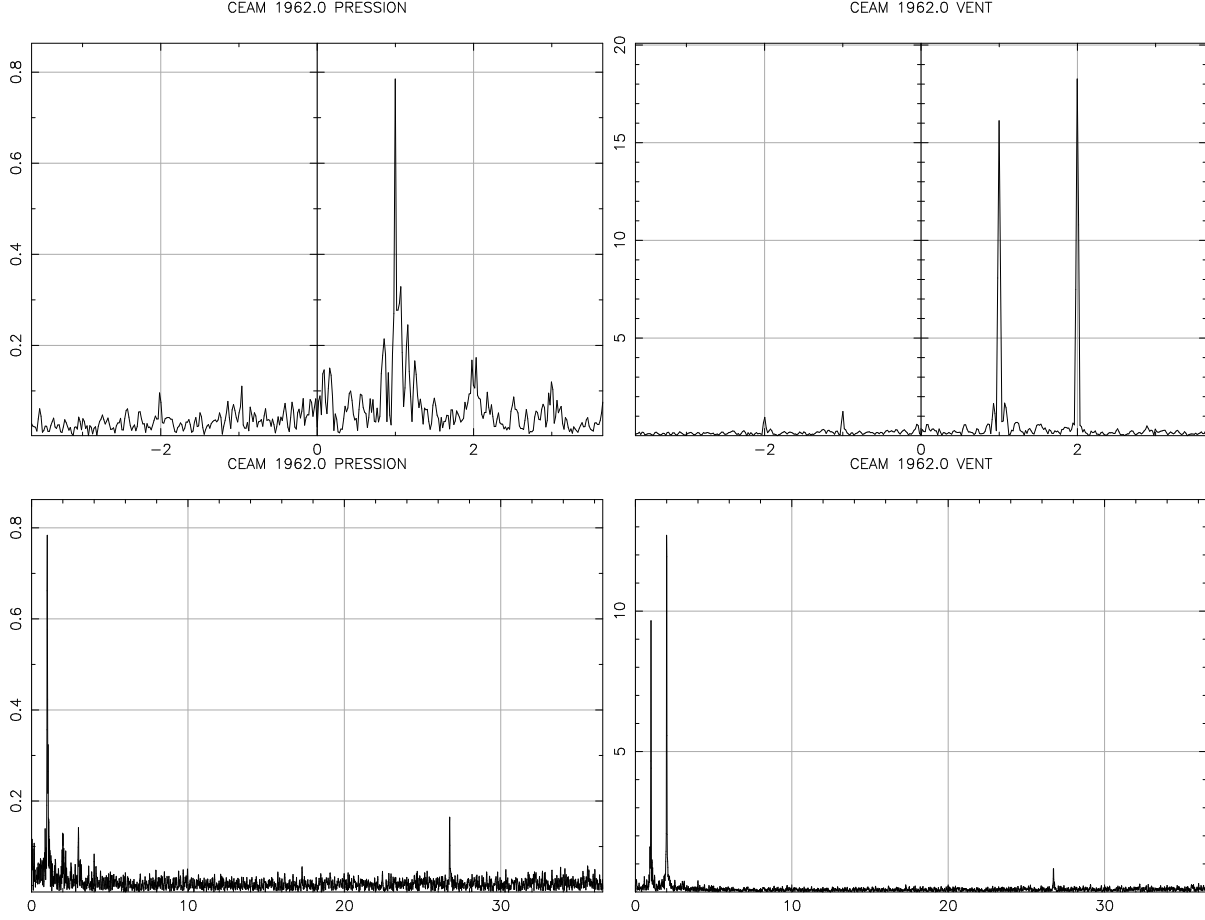


FIG. 2.19 – Spectres des basses fréquences du CEAM (NCEP/NCAR Reanalysis project, depuis 1962.0). A gauche, le terme de pression, à droite, le terme de vent. Les amplitudes sont en mas et les fréquences en cycles par an (cpa). Sur les graphiques du bas, on voit l'onde 0_1 prograde de période 13.67 jours (26.72 cycles par an) et dont la présence dans le moment cinétique atmosphérique est imputée à l'action gravitationnelle de la Lune.

Un premier calcul a été mené avec la série de moment cinétique atmosphérique du NCEP/NCAR Reanalysis project dans sa version NIB sur la totalité des données, couvrant ainsi la période 1962.0 à nos jours. Les spectres montrant les termes annuels, semi-annuels et ter-annuels sont sur la figure 2.19. On remarque que les termes de fortes amplitudes sont localisés dans la partie prograde du spectre. Après estimations par moindres carrés des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels dans le CEAM (en séparant le terme pression du terme vent), on applique la fonction de transfert aux amplitudes trouvées pour obtenir les amplitudes correspondantes dans les nutations (tables 2.8 et 2.9). Nous estimons également la contribution de l'atmosphère à la nutation principale de période 18.6 ans (prograde et rétrograde). Nous montrons ainsi que la contribution de l'atmosphère

TAB. 2.8 – Estimations des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels et de 18.6 ans dans le CEAM (NCEP/NCAR Reanalysis project, depuis 1962.0) : amplitudes en mas et phases en degrés rapportées à l’époque J2000.0.

	pression		vent	
	cpa	mas	mas	
+0.0538 (+18.6 ans)	0.04	60.65°	0.28	258.44°
-0.0538 (-18.6 ans)	0.11	109.38°	0.34	182.09°
+1	1.18	178.15°	16.30	-0.29°
-1	0.09	41.25°	1.42	143.05°
+2	0.14	119.64°	18.51	193.90°
-2	0.05	136.25°	0.84	-11.46°
+3	0.18	-10.34°	0.55	92.32°
-3	0.06	93.59°	0.06	-19.51°

aux nutations reste bien en dessous de la précision des observations VLBI (environ 200 μ as). Nous notons aussi la présence, dans le spectre de la figure 2.19, la présence de l’onde O_1 prograde, de période 13.67 jours. Cette onde est la signature de l’influence de la Lune sur le moment cinétique atmosphérique. Son effet sur les nutations est négligeable.

Afin de confronter les effets atmosphériques calculés à des observations, nous avons comparé ces effets aux amplitudes des termes restants dans les résidus des observations par rapport au modèle IAU2000A (voir le Chapitre 1 de ce travail). Nous utilisons une série de coordonnées du CIP allant de 1985.0 à 2003 (IERS C04) et la série de CEAM précédente (NCEP/NCAR) restreinte au même intervalle de temps. C’est vers 1985 que le VLBI a nettement amélioré la précision sur l’estimation des paramètres de nutation, ce qui justifie notre choix de dates pour restreindre l’intervalle de temps de nos séries. Notons qu’il n’est plus possible d’estimer correctement le terme de période 18.6 ans sur ces séries devenues trop courtes⁴. Nous nous contenterons donc d’estimer les termes annuels, semi-annuels et ter-annuels (voir la tables 2.10 et 2.11). Les ordres de grandeur des résultats rejoignent ceux de la table précédente avec des amplitudes qui ont toutefois varié. Ceci montre une forte variabilité temporelle dans l’excitation atmosphérique, comme il a été noté dans Bizouard et al. (1998) et Yseboodt et al. (2002). Cette variabilité temporelle est à la source d’une imprédictibilité des effets atmosphériques sur les nutations en conférant à l’excitation une forte incertitude.

Nous avons vu dans le premier Chapitre que les différences entre observations et modèle, rapportées au nouveau modèle de nutation IAU2000A (Mathews et al. 2002), conservaient une variance de l’ordre de 200 μ as. Nous avons à ce moment également fait remarquer la présence de pics annuels et saisonniers dans ces résidus dont l’amplitude avoi-

⁴Une série de 38 ans serait nécessaire pour une estimation correcte de l’onde en 18.6 ans : on respecte alors tout juste la condition de Nyquist.

TAB. 2.9 – Contributions annuelles, semi-annuelles et ter-annuelles et de 18.6 ans de l’atmosphère (NCEP/NCAR depuis 1962.0) sur la nutation $P = X + iY$: amplitudes en μas et phases en degrés rapportées à l’époque J2000.0.

	pression		vent		total	
	cpa	μas	μas		μas	
+0.0538 (+18.6 y)	3.47	240.81°	0.50	258.60°	3.95	243.03°
-0.0538 (-18.6 y)	10.87	-70.46°	0.58	185.25°	10.71	-73.44°
+1	48.51	-1.71°	33.47	-0.12°	81.98	-1.06°
-1	47.53	41.59°	7.56	143.20°	46.60	50.74°
+2	3.36	-60.32°	39.76	194.06°	38.99	198.82°
-2	3.59	136.58°	2.26	-11.33°	2.07	101.09°
+3	3.34	169.81°	1.21	92.54°	3.79	151.70°
-3	2.37	93.95°	0.15	-19.96°	2.32	90.56°

TAB. 2.10 – Estimations des termes annuels, semi-annuels, ter-annuels et de 13.67 jours dans le CEAM (NCEP/NCAR Reanalysis project, de 1985.0 à 2003.3) : amplitudes en mas et phases rapportées à l’époque J2000.0.

	pression		vent	
	cpa	mas	mas	
+1	1.43	171.32°	12.25	-13.60°
-1	0.14	65.01°	1.87	142.35°
+2	0.23	78.01°	18.35	192.33°
-2	0.10	50.61°	0.64	0.96°
+3	0.26	-0.69°	0.83	96.77°
-3	0.04	73.08°	0.32	11.70°
0 ₁ (+13.67 jours)	0.21	53.85°	1.35	223.36°

TAB. 2.11 – Comparaison des contributions annuelles, semi-annuelles, ter-annuelles et de 13.67 jours de l’atmosphère (NCEP/NCAR de 1985.0 à 2003.3) sur la nutation $P = X + iY$: amplitudes en μas et phases rapportées à l’époque J2000.0, avec les écarts au pôle célestes rapportés au modèle IAU2000A.

	pression		vent		total		IERS C04	
	cpa	μas		μas		μas		μas
+1	58.79	-8.76°	25.85	-13.45°	84.59	-10.19°	10.26	109.06°
-1	79.21	64.87°	9.96	142.06°	82.00	71.67°	17.23	260.14°
+2	5.95	257.77°	39.44	192.49°	42.27	199.83°	7.62	-18.89°
-2	7.19	51.52°	1.75	1.20°	8.41	42.32°	19.31	-39.71°
+3	4.82	179.41°	1.82	97.23°	5.38	159.79°	4.91	-79.01°
-3	1.58	73.75°	1.15	11.45°	2.08	53.85°	10.57	264.91°
0_1 (+13.67 jours)	0.09	234.01°	3.32	123.52°	3.29	124.99°	39.57	153.97°

sinait les 100 μas . Dans son article, Mathews stipule que les effets atmosphériques moyens n’ont pas été pris en compte lors de l’élaboration du modèle, notamment à cause du fait que l’atmosphère, selon les diverses études, n’explique pas correctement la nutation annuelle (défauts d’amplitudes et de phases). De plus, la variabilité temporelle du pic annuel lui confère une forte incertitude (Bizouard et al. 1998, Yseboodt et al. 2002). Cependant, on peut penser que ces pics annuels sont la signature, au moins partielle, de l’atmosphère. Mathews choisit de l’interpréter comme une contribution de l’onde thermique S_1 (onde liée au trajet du Soleil dans le ciel et à l’échauffement de l’air qui lui est conséquent). Il faut faire remarquer que ces pics restent noyés dans le bruit observationnel (200 μas) leurs effets demeurent de toute façon en deçà de l’incertitude. Notons aussi, à l’instar d’Yseboodt et al. (2002), que ces effets atmosphériques sont très dépendants du modèle d’atmosphère utilisé et fluctuent d’un modèle à un autre. Leur prise en compte dans un modèle de nutation requiert l’amélioration des modèles de circulation atmosphérique existants, en particulier aux fréquences diurnes et sub-diurnes.

2.4 Excitation du mouvement libre de Chandler

2.4.1 Caractérisation du bruit exciteur

En dehors des oscillations périodiques provenant d’un forçage externe (échauffement diurne ou annuel dû au Soleil, harmoniques saisonnières...), les excitations atmosphériques et océaniques sont constituées par du bruit dont le type peut être déterminé par l’étude de la variance d’Allan (voir Annexe C). La figure 2.20 montre la variance d’Allan en fonction de la période (donnée par la période de rééchantillonnage du signal). Sur ces diagrammes log-log, une pente de +1 signifie un bruit rouge (marche aléatoire), une pente nulle montre un bruit de scintillation (flicker noise) et une pente de -1 indique un bruit blanc. On voit nettement que pour les périodes supérieures à 50 jours, et donc pour toutes

les bandes de fréquence saisonnières et annuelles, ainsi que pour la bande de fréquence de Chandler (périodes voisines de 433 jours), l’atmosphère et l’océan ainsi que l’excitation du mouvement du pôle observé présentent une excitation de type bruit blanc.

2.4.2 Evaluation de l’excitation atmosphérique et océanique

L’oscillation de Chandler ne résulte pas d’une excitation à une seule fréquence σ_0 mais d’une bande de fréquence étendue $[\sigma_0 - \Delta\sigma, \sigma_0 + \Delta\sigma]$ centrée sur σ_0 . Nous avons montré plus haut que l’excitation des couches fluides et de l’excitation géodésique, pour des périodes entre 100 jours et 1000 jours, est un bruit blanc. On montre alors que la puissance totale contenue dans la bande $[\sigma_0 - \Delta\sigma, \sigma_0 + \Delta\sigma]$ est :

$$P_{cw} = K \frac{1 + 4Q^2}{Q} \arctan\left(\frac{2Q\Delta\sigma}{\sigma_0}\right) \sigma_0 \quad (2.54)$$

où Q est le facteur de qualité et K la densité spectrale du bruit blanc excitateur. En prenant un facteur de qualité de 179 (Wilson et Vicente 1990), 99% de la puissance vient de la bande $[0.693 \text{ cpa}, 0.993 \text{ cpa}]$, soit l’intervalle de périodes $[368 \text{ jours}, 527 \text{ jours}]$. Plus le facteur de qualité est élevé, plus la bande de fréquence est étroite autour de σ_0 . Notons que l’estimation de la puissance contenue dans la bande de fréquence de Chandler nécessite de retirer au signal tous les termes harmoniques, en particulier le terme annuel dont la proximité en fréquence pourrait perturber notre calcul.

Gross (2000) a estimé la puissance dans la bande $[0.730 \text{ cpa}, 0.913 \text{ cpa}]$ au moyen d’un spectre par transformée de Fourier rapide (FFT, voir Annexe C) pour la période de temps 1985.0-1996.3 correspondant à la série océanique de Ponte et al. (1998). L’excitation géodésique est calculée avec un facteur de qualité de 179. Brzeziński et Nastula (2000) ont travaillé sur les mêmes séries en choisissant un facteur de qualité de 170 et en utilisant la méthode du maximum d’entropie pour évaluer la puissance spectrale à la fréquence de Chandler. Afin de comparer nos résultats à ces deux études, nous réalisons l’estimation sur la bande de fréquence $[0.693 \text{ cpa}, 0.993 \text{ cpa}]$ à partir d’un spectre par FFT pour des séries entre 1985.0 et 1996.3 (NCEP/NCAR Reanalysis pour l’excitation atmosphérique, Ponte et al. (1998) pour l’excitation océanique et la série combinée IERS C04 pour le mouvement du pôle observé, facteur de qualité de 179). La table 2.12 réunit nos résultats et ceux de Gross (2000) et Brzeziński et Nastula (2000). Notre étude et celle de Gross (2000) montrent une puissance trop importante dans les couches fluides (23% d’excès pour notre calcul, 10% pour celui de Gross), alors que l’étude de Brzeziński et Nastula (2000) montre un déficit de 20%.

Ces résultats ne permettent pas d’affirmer avec certitude que l’excitation combinée de l’atmosphère et des océans rend compte du terme Chandler, essentiellement pour deux raisons. Premièrement, l’excitation géodésique est conditionnée par le facteur de qualité Q . En considérant que l’excitation à la fréquence de Chandler est un bruit blanc, la sensibilité de la puissance P_{cw} au facteur de qualité est donnée par la relation $\Delta P_{cw}/P_{cw} = \Delta Q/Q$. Des valeurs de Q plus petites, typiquement (Furuya et Chao 1996) $Q = 49$, feront chuter la puissance spectrale de 73% et la rendront trop faible par rapport à l’excitation géophysique. Cette remarque nous permet de privilégier les valeurs de Q élevées comme

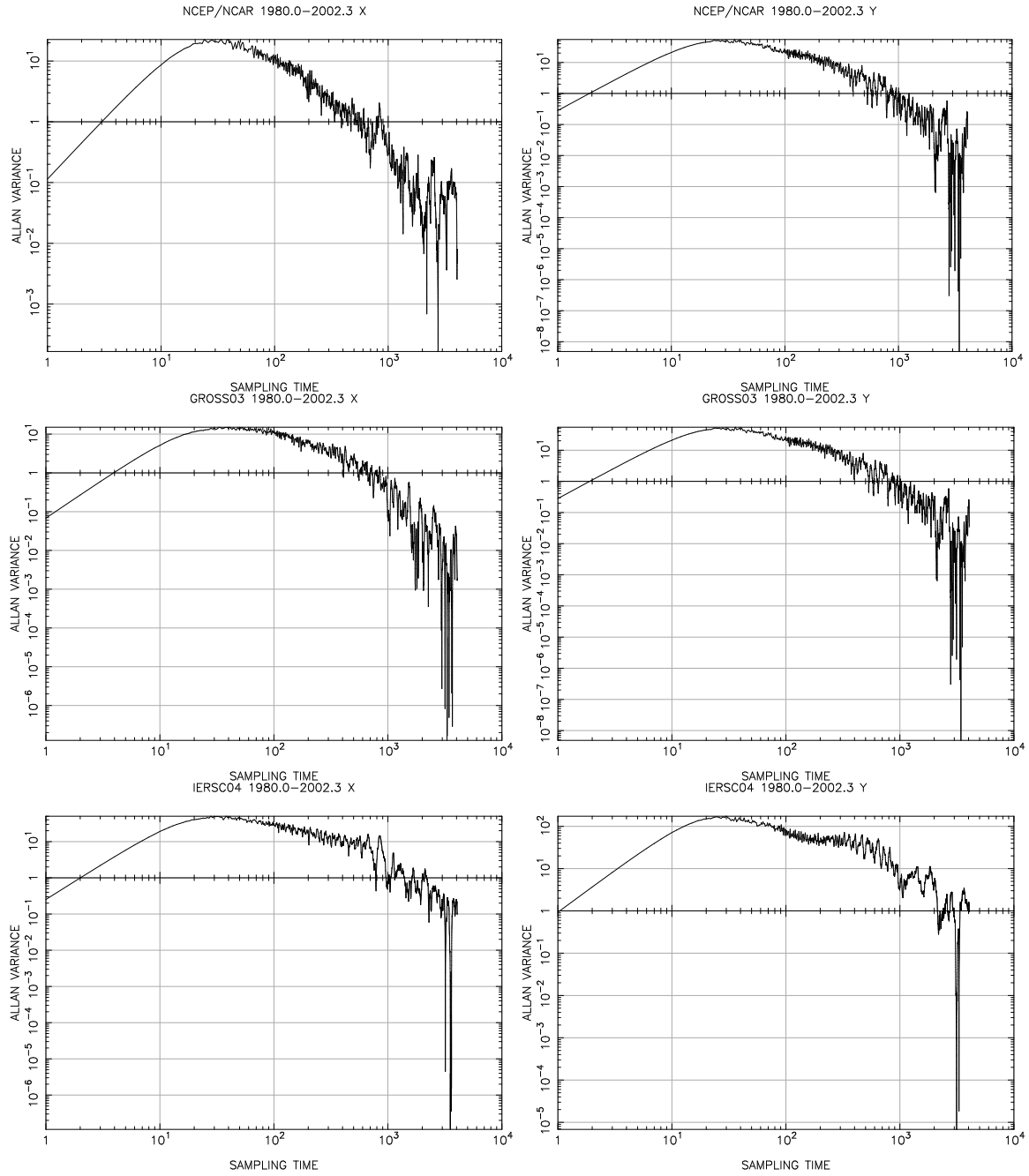


FIG. 2.20 – Variance d'Allan pour l'excitation atmosphérique (en haut), océanique (au milieu) et du mouvement du pôle observé (en bas).

TAB. 2.12 – Puissance spectrale dans la bande de Chandler pour 1985.0-1996.3 en mas^2/cpa .

	cette étude		Brzeziński et Nastula (2000)	Gross (2000)
	puissance	%	%	%
χ^G	1.04	100	100	100
χ^A	0.51	49	40	30
χ^O	0.70	67	-	76
χ^F	1.28	123	80	110

celles estimées par Wilson et Vicente (1990). La deuxième raison pour laquelle le scepticisme d'impose est que les séries de moment cinétique océanique sont imprécises à en juger par les incohérences d'une série à l'autre.

2.5 Le problème de la variabilité temporelle de l'excitation géophysique

Les estimations des amplitudes effectuées jusqu'à présent dans ce travail représentaient l'effet moyen sur une période de temps donnée, en général fixée par la série utilisée. Par exemple, pour étudier les effets combinés de l'atmosphère et de l'océan sur le mouvement du pôle, nous nous sommes restreints à l'intervalle de temps couvert par la série océanique, c'est à dire 1980-2002 dans le cas de la série de Gross (2003a, 2003b). Les amplitudes obtenues sont donc des amplitudes moyennées sur la période d'estimation et le bilan de moment cinétique n'est qu'un bilan moyen ignorant les fluctuations qui ont pu se produire durant toutes ces années. Ces fluctuations confèrent à l'excitation géophysique un caractère d'imprédictibilité qui fait que le mouvement du pôle, tout comme le LOD et les nutations possèdent une partie non-modélisable. Contrairement à l'excitation gravitationnelle luni-solaire dont la régularité permet de fixer les amplitudes des termes de nutation, on ne peut dire, dans le cas de l'excitation géophysique, que l'atmosphère excite le mouvement du pôle avec une amplitude et une phase invariables dans le temps pour une fréquence donnée. On peut seulement dire que, sur une période de temps donnée, l'atmosphère a excité le mouvement du pôle avec une amplitude moyenne mais que probablement, pendant cette période, il y a eu des moments où l'amplitude d'excitation était plus faible ou plus forte que cette amplitude moyenne. Ces fluctuations de puissance de l'excitation géophysique peuvent être estimées uniquement à posteriori en analysant les observations antérieures.

Le but de cette Section est de déterminer les variations temporelles des amplitudes et des phases des principaux termes périodiques présents dans l'excitation géophysique et jouant un rôle prépondérant dans le mouvement du pôle et la longueur du jour (termes saisonniers), tout en perturbant légèrement les nutations (termes rétrogrades diurnes)⁵.

⁵Les méthodes d'analyse temps-fréquence sont expliquées brièvement en Annexe C de ce travail.

La détermination de ces variations temporelles possède un double intérêt. En premier lieu, ces variations sont comparables aux variations des amplitudes des termes correspondants dans l'excitation géodésique observée afin de savoir si ces derniers sont associés à des processus géophysiques. En second lieu, la variabilité sur un intervalle de temps permet de quantifier l'incertitude sur les termes périodiques estimés sur ce même intervalle de temps.

2.5.1 Excitation annuelle et saisonnière équatoriale

Nous faisons cette étude sur les séries NCEP/NCAR Reanalysis pour l'excitation atmosphérique et Gross (2003a, 2003b) pour l'excitation océanique, limitées à la période 1980.0-2002.3. La première étape consiste à filtrer chacune des séries pour retirer les cycles annuels et saisonniers moyens. Cette étape a été décrite dans les paragraphes précédents. Puis, nous appliquons une fenêtre glissante de largeur 2 ans au signal, et que l'on translate par pas de 0.5 an. Sur chaque intervalle de 2 ans, nous estimons les termes annuels et semi-annuels au moyen d'un ajustement par moindres carrés. Les variations ainsi enregistrées sont reportées sur la figure 2.21 et sont comparées aux variations correspondantes dans l'excitation du mouvement du pôle observé, obtenues par la même procédure.

On note immédiatement de très fortes similitudes entre les variations d'amplitudes des termes en phase et en quadrature dans le mouvement du pôle observé et dans l'excitation géophysique. Cet accord est quantifié par les coefficients de corrélation reportés dans la table 2.13 et dont les valeurs élevées attestent que ce sont bien les processus géophysiques (océaniques ou atmosphériques) qui sont à l'origine des variations observées. Les écarts-types présents dans la même table donnent l'incertitude sur les estimations moyennes effectuées dans les paragraphes précédents. Cette incertitude, qui pourrait être qualifiée de "physique," par opposition à l'incertitude formelle issue d'un traitement statistique des données, est un ordre de grandeur au-dessus de celle-ci.

2.5.2 Excitation annuelle et saisonnière axiale

Les variations des amplitudes des termes annuels, semi-annuels et ter-annuels du LOD sont environ un ordre de grandeur en-dessous des amplitudes elles-mêmes. Les corrélations restent toutes supérieures à 0.85 (voir la table 2.14).

2.5.3 Excitation annuelle et saisonnière dans l'espace et nutations

Nous avons répété l'opération pour le CEAM entre 1985.0 et 2003.3 (table 2.15). La variabilité induit une incertitude d'environ 50% de la valeur de l'amplitude moyenne. Cet effet, souligné par Yseboodt et al. (2002), montre que le rôle de l'atmosphère dans la nutation ne peut pas faire l'objet d'une modélisation simple à but prédictif. Cela justifie aussi pleinement que l'atmosphère, n'étant pas seule responsable du résidu de l'excitation annuelle constaté dans les observations, ne soit pas prise en compte dans le modèle de nutation MHB2000 (Mathews et al. 2002) recommandé par l'UAI.

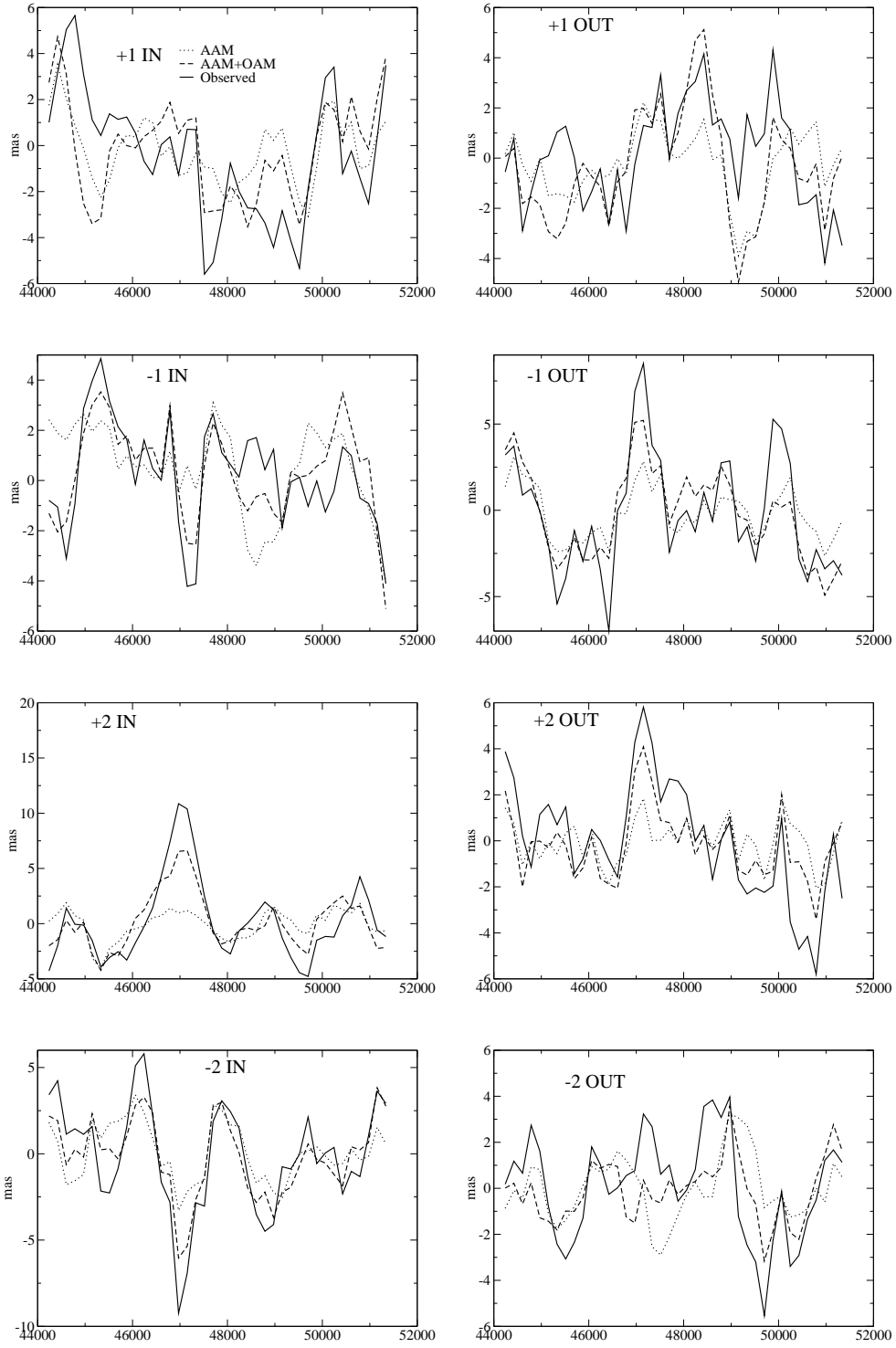


FIG. 2.21 – Amplitude des termes annuels et semi-annuels (progrades et rétrogrades) entre 1980.0 et 2002.3. L'amplitude moyenne sur l'intervalle 1980.0-2002.3 a été retirée.

TAB. 2.13 – Ecart-types et coefficients de corrélation pour les variations d’amplitude des termes saisonniers entre les composantes équatoriales des excitations géodésique et géophysique sur la période 1980.0-2002.3.

		écart-type			corrélation
		observation	atmosphère	atmosphère+océan	(total,observation)
		mas	mas	mas	
+1 cpa	in	2.74	1.42	2.11	0.62
+1 cpa	out	2.02	1.35	2.18	0.55
-1 cpa	in	2.08	1.78	1.86	0.80
-1 cpa	out	3.35	1.51	2.60	0.85
+2 cpa	in	3.62	1.33	2.50	0.89
+2 cpa	out	2.51	0.96	1.50	0.81
-2 cpa	in	3.10	1.64	2.25	0.91
-2 cpa	out	2.20	1.38	1.34	0.65
+3 cpa	in	2.98	1.62	1.99	0.85
+3 cpa	out	1.76	1.31	1.21	0.84
-3 cpa	in	1.99	1.45	1.51	0.80
-3 cpa	out	1.56	1.17	1.60	0.65

TAB. 2.14 – Ecart-types et coefficients de corrélation pour les variations d’amplitude des termes saisonniers entre la composante axiale de l’excitation atmosphérique et la longueur du jour sur la période 1962.0-2003.3.

		écart-type		corrélation
		observation	atmosphère	(total,observation)
		ms	ms	
+1 cpa	in	0.05	0.04	0.87
+1 cpa	out	0.05	0.05	0.94
+2 cpa	in	0.04	0.03	0.86
+2 cpa	out	0.04	0.04	0.94
+3 cpa	in	0.03	0.03	0.92
+3 cpa	out	0.03	0.03	0.91

TAB. 2.15 – Ecart-types pour les variations d’amplitude des termes saisonniers entre les composantes équatoriales du CEAM sur la période 1985.0-2003.3, effet sur la nutation.

		écart-type		
		CEAM pression	CEAM vent	effet sur la nutation
		mas	mas	μ as
+1 cpa	in	0.36	0.70	14.92
+1 cpa	out	0.36	2.35	12.18
-1 cpa	in	0.08	0.58	41.53
-1 cpa	out	0.10	0.40	51.28
+2 cpa	in	0.13	0.49	3.33
+2 cpa	out	0.20	0.54	5.23
-2 cpa	in	0.12	0.38	8.42
-2 cpa	out	0.10	0.57	6.85
+3 cpa	in	0.15	0.35	3.12
+3 cpa	out	0.07	0.71	2.00
-3 cpa	in	0.10	0.50	4.02
-3 cpa	out	0.08	0.40	2.82

La table 2.16 ci-après résume les variabilités des termes annuels et semi-annuels dans le mouvement du pôle, le LOD et la nutation. L’amplitude moyenne d’un terme constitue la base 100 et le pourcentage de variabilité est exprimé relativement à l’amplitude de ce terme.

TAB. 2.16 – Variabilités des termes annuels et semi-annuels dans le mouvement du pôle, le LOD et la nutation, en pourcentage de l’amplitude moyenne du terme considéré.

	mouvement du pôle	LOD	nutation
+1 cpa	25	17	23
-1 cpa	33	-	82
+2 cpa	106	21	15
-2 cpa	62	0.38	130

2.6 Les effets lunisolaires sur l'atmosphère et les conséquences sur la rotation terrestre

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe une composante spectrale dans le moment cinétique atmosphérique (O_1) qui à priori ne peut être attribuée qu'à la gravitation lunaire. Plus généralement la Lune et le Soleil exercent sur l'atmosphère des forces de marée susceptibles de se répercuter sur la rotation terrestre. Nous allons montrer qu'en effet, il existe bien un moment de force lunisolaire sur l'atmosphère, et que celui-ci doit être retiré du moment cinétique atmosphérique pour obtenir rigoureusement l'effet atmosphérique sur la rotation de la Terre solide. Dans cette étude, présentée en détail dans Bizouard et Lambert (2002a), nous allons montrer que l'atmosphère influence significativement la précession et la nutation en 18.6 ans de la Terre solide.

2.6.1 Expression du moment des forces

Formulation analytique

Le moment des forces gravitationnelles agissant sur l'atmosphère s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_g = \int_{V_A} \vec{r} \times \vec{\nabla} \Phi \rho_A dV_A \quad (2.55)$$

où V_A est le volume de l'atmosphère, ρ_A , la densité et Φ , le potentiel externe de gravitation. Le vecteur \vec{r} désigne la position d'un point de l'atmosphère par rapport au centre de la Terre.

On décompose en premier lieu le potentiel en série d'harmoniques sphériques :

$$\Phi(\vec{r}, t) = \sum_l \sum_{m=0}^l \left(\frac{r}{a}\right)^l g (c_{lm}(t) \cos(m\lambda) + \tilde{c}_{lm}(t) \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \theta) \quad (2.56)$$

où λ désigne la longitude, θ , la colatitude, et r , la distance au centre de la Terre, ces coordonnées étant exprimées dans le repère terrestre. Les quantités a et g sont respectivement le rayon équatorial terrestre et l'accélération moyenne de la pesanteur. Les corps du système solaire (Lune et Soleil essentiellement) sont responsables des forces de marées. Leur position, et donc les forces qu'ils exercent, variant avec le temps, on prendra les coefficients d'harmoniques sphériques c_{lm} et \tilde{c}_{lm} dépendants du temps. Les P_{lm} sont les polynômes de Legendre qui satisfont la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^{+1} P_{nk}(x) P_{mk}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \frac{(n+k)!}{(n-k)!} \quad (2.57)$$

On substitue l'expression (2.56) du potentiel dans l'équation (2.55), en écrivant l'élément de volume $dV_A = r^2 dr \sin \theta d\theta d\lambda$ et l'opérateur $\vec{r} \times \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\lambda} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \hat{\theta}$ ($\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ sont les

vecteurs unitaires respectivement tangent à l'équateur et dirigé vers l'ouest et tangent au méridien et dirigé vers le sud). On trouve alors :

$$\vec{\Gamma}_g = \sum_{l,m} \vec{\Gamma}_{lm} \quad (2.58)$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{lm} = \int_{r,\theta,\lambda} \left(\frac{r}{a}\right)^l g \{ (c_{lm}(t) \cos(m\lambda) + \tilde{c}_{lm}(t) \sin(m\lambda)) \frac{\partial P_{lm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \hat{\lambda} - \\ \frac{m}{\sin \theta} (-c_{lm}(t) \sin(m\lambda) + \tilde{c}_{lm}(t) \cos(m\lambda)) P_{lm}(\cos \theta) \hat{\theta} \} \rho_A r^2 dr \sin \theta d\theta d\lambda \end{aligned} \quad (2.59)$$

On peut maintenant considérer deux approximations. D'une part, la pression de surface s'écrit comme le poids de la colonne d'air verticale située au dessus du lieu de mesure :

$$P_S = \int_r^\infty \rho_A g dr \quad (2.60)$$

D'autre part, en première approximation, la distance r , pour un point de l'atmosphère, est constante et vaut a , la couche d'air étant considérée comme fine devant le rayon terrestre (approximation de "couche mince"). L'équation (2.59) se réduit alors à :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{lm} = a^2 \int_{\theta,\lambda} P_S \{ (c_{lm}(t) \cos(m\lambda) + \tilde{c}_{lm}(t) \sin(m\lambda)) \frac{\partial P_{lm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \hat{\lambda} - \\ \frac{m}{\sin \theta} (-c_{lm}(t) \sin(m\lambda) + \tilde{c}_{lm}(t) \cos(m\lambda)) P_{lm}(\cos \theta) \hat{\theta} \} \sin \theta d\theta d\lambda \end{aligned} \quad (2.61)$$

On décompose ensuite la pression de surface en série d'harmoniques sphériques :

$$P_S(\vec{r}) = \sum_l \sum_{m=0}^l (p_{lm} \cos(m\lambda) + \tilde{p}_{lm} \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \theta) \quad (2.62)$$

On sépare enfin le vecteur $\vec{\Gamma}_{lm}$ en deux composantes équatoriales, notées $\Gamma_{1,lm}$ et $\Gamma_{2,lm}$ et une composante axiale $\Gamma_{3,lm}$ et on adopte la notation complexe pour les composantes équatoriales, $\Gamma_{lm} = \Gamma_{1,lm} + i\Gamma_{2,lm}$. On obtient finalement après calculs l'expression de la composante équatoriale :

$$\begin{aligned} \Gamma_{lm}(t) = D((c_{lm}(t) + i\tilde{c}_{lm}(t))(\tilde{p}_{l,m-1}(t) + ip_{l,m-1}(t))(1 + \delta_{m1} - \delta_{m0}) - \\ (\tilde{c}_{lm}(t) + ic_{lm}(t))(p_{l,m+1}(t) + i\tilde{p}_{l,m+1}(t))((l+m+1)(l-m) + \delta_{m0}l(l+1))) \end{aligned} \quad (2.63)$$

et celle de la composante axiale :

$$\Gamma_{3,lm}(t) = 2D(\tilde{c}_{lm}(t)p_{lm}(1 + \delta_{m0}) - c_{lm}(t)\tilde{p}_{lm}(1 - \delta_{m0})) \quad (2.64)$$

où la constante D vaut $\frac{\pi a^2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$.

Dans la suite, on s'intéressera aux termes de degré 2 ($l = 2, m = 0, 1, 2$) du potentiel externe de gravitation. Nous sélectionnons uniquement ces termes car les autres sont négligeables pour le calcul que nous menons. Dans ces termes de degré 2, l'ordre 1 constitue la partie diurne et l'ordre 2 la partie semi-diurne. Les expressions des termes de degré 2 des parties équatoriale et axiale du moment de force se déduisent des expressions (2.63) et (2.64) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{20} &= -\frac{12\pi a^2}{5} i c_{20}(p_{21} + i\tilde{p}_{21}) \\ \Gamma_{21} &= \frac{12\pi a^2}{5} \{ip_{20}(c_{21} + i\tilde{c}_{21}) - 2(p_{22} + i\tilde{p}_{22})(\tilde{c}_{21} + ic_{21})\} \\ \Gamma_{22} &= \frac{24\pi a^2}{5} (c_{22} + i\tilde{c}_{22})(\tilde{p}_{21} + ip_{21}) \\ \Gamma_{3,20} &= 0 \\ \Gamma_{3,21} &= \frac{12\pi a^2}{5} (\tilde{c}_{21}p_{21} - c_{21}\tilde{p}_{21}) \\ \Gamma_{3,22} &= \frac{24\pi a^2}{5} (\tilde{c}_{22}p_{22} - c_{22}\tilde{p}_{22}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pour calculer les c_{lm} et les \tilde{c}_{lm} , nous utilisons le potentiel donné par Roosbeek (1995), établi à partir des théories ELP 2000-82B (Chapront-Touzé et al. 1985) pour la Lune et VSOP87 (Bretagnon et Francou 1988) pour le Soleil et les planètes, et dont l'expression générale est :

$$V = D_1 \sum_{n=1}^5 \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[\sum_{m=0}^n G_{nm} R_{nm} \right] \quad (2.66)$$

où $D_1 = 2.63 \text{ m}^2/\text{s}^2$ est la constante de Doodson. Le terme de degré 2 s'écrit :

$$V_2 = D_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 [G_{20}R_{20} + G_{21}R_{21} + G_{22}R_{22}] \quad (2.67)$$

avec :

$$\begin{cases} G_{20} = \frac{1}{2}(1 - 3\cos^2 \theta) \\ G_{21} = \sin 2\theta \\ G_{22} = \sin^2 \theta \end{cases} \quad (2.68)$$

et :

$$\begin{cases} R_{20} = \sum_j C_0^{j,20} \cos f_{j,20} \\ R_{21} = \sum_j S_0^{j,21} \sin f_{j,21} \\ R_{22} = \sum_j C_0^{j,22} \cos f_{j,22} \end{cases} \quad (2.69)$$

où C_0^j et S_0^j sont les amplitudes des ondes de marées. Les arguments f_j sont des combinaisons entières des variables de Doodson (voir Annexe A).

Prenons l'expression de V_{20} :

$$V_{20} = D_1 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \frac{1}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta) \sum_j C_0^{j,20} \cos f_{j,20} \quad (2.70)$$

avec :

$$f_{j,20} = a_2^{j,20} s + a_3^{j,20} h + a_4^{j,20} p + a_5^{j,20} N' + a_6^{j,20} p_s = \theta_{j,20} \quad (2.71)$$

En comparant à l'expression de Φ_{20} donnée par l'équation (2.56), on en déduit immédiatement :

$$c_{20} = -\frac{D_1}{g} \sum_j C_0^{j,20} \cos f_{j,20} \quad (2.72)$$

Le calcul des autres c_{lm} s'effectue de la même manière :

$$\begin{aligned} c_{21} &= \frac{2}{3} \frac{D_1}{g} \sum_j S_0^{j,21} \sin(15^\circ T + GMST_{12h} + f_{j,21}) \\ \tilde{c}_{21} &= \frac{2}{3} \frac{D_1}{g} \sum_j S_0^{j,21} \cos(15^\circ T + GMST_{12h} + f_{j,21}) \\ c_{22} &= \frac{1}{3} \frac{D_1}{g} \sum_j C_0^{j,22} \cos(30^\circ T + GMST_{12h} + f_{j,22}) \\ \tilde{c}_{22} &= \frac{1}{3} \frac{D_1}{g} \sum_j C_0^{j,22} \sin(30^\circ T + GMST_{12h} + f_{j,22}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

où T est le temps universel compté en heures.

Le terme Γ_{20} s'écrit donc finalement sous la forme d'un terme rétrograde et d'un terme prograde :

$$\Gamma_{20} = \sum_j \Gamma_{0,-}^{j,20} e^{-i\theta_{j,20}} + \sum_j \Gamma_{0,+}^{j,20} e^{if_{j,20}} \quad (2.74)$$

avec :

$$\Gamma_{0,-}^{j,20} = \Gamma_{0,+}^{j,20} = -\frac{6}{5} \frac{D_1}{g} \pi a^2 C_0^{j,20} (\tilde{p}_{21} + ip_{21}) \quad (2.75)$$

Le terme Γ_{21} s'écrit comme suit :

$$\Gamma_{21} = \sum_j \Gamma_{0,-}^{j,21} e^{-i(15^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,21})} + \sum_j \Gamma_{0,+}^{j,21} e^{i(15^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,21})} \quad (2.76)$$

avec :

$$\Gamma_{0,-}^{j,21} = -\frac{24}{15} \frac{D_1}{g} \pi a^2 S_0^{j,21} p_{20} \quad (2.77)$$

et :

$$\Gamma_{0,+}^{j,21} = -\frac{48}{15} \frac{D_1}{g} \pi a^2 S_0^{j,21} (p_{22} + i\tilde{p}_{22}) \quad (2.78)$$

Et le terme Γ_{22} s'écrit :

$$\Gamma_{22} = \sum_j \Gamma_{0,-}^{j,22} e^{-i(30^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,22})} \quad (2.79)$$

n'affichant qu'un terme rétrograde avec :

$$\Gamma_{0,-}^{j,22} = \frac{48}{15} \frac{D_1}{g} \pi a^2 C_0^{j,22} (\tilde{p}_{21} + ip_{21}) \quad (2.80)$$

Les termes axiaux s'écrivent :

$$\Gamma_3^{20} = 0 \quad (2.81)$$

$$\Gamma_3^{21} = \frac{24}{15} \frac{D_1}{g} \pi a^2 \sum_j S_0^{j,21} (p_{21} \cos(15^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,21}) - \tilde{p}_{21} \sin(15^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,21})) \quad (2.82)$$

$$\Gamma_3^{22} = \frac{24}{15} \frac{D_1}{g} \pi a^2 \sum_j C_0^{j,22} (p_{22} \cos(30^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,22}) - \tilde{p}_{22} \sin(30^\circ t + GMST_{12h} + f_{j,22})) \quad (2.83)$$

Application numérique

Pour évaluer numériquement le moment de force (selon les équations (2.74), (2.76), (2.79), (2.81), (2.82) et (2.83)), nous avons utilisé la pression moyenne sur l'ensemble de la surface du globe de 1970 à 1997 donnée par le modèle NCEP/NCAR Reanalysis, dont les valeurs sont :

$$\begin{aligned} p_{20} &= -3645.4 \text{ Pa} \\ p_{21} &= 7.7 \text{ Pa} \\ \tilde{p}_{21} &= -880.1 \text{ Pa} \\ p_{22} &= 421.6 \text{ Pa} \\ \tilde{p}_{22} &= -194.9 \text{ Pa} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nous calculons donc le couple résultant de l'effet d'un terme périodique dans le potentiel externe gravitationnel sur la distribution de masse moyenne de l'atmosphère. Cet effet, pour l'onde diurne K_1 ($S_0 = 0.53$) est proportionnel à $S_0 p_{20}$ avec $p_{20} = -3645.4 \text{ Pa}$. On peut aussi estimer l'effet du terme constant dans le potentiel externe gravitationnel ($C_0 = 0.74$) sur le terme diurne de la pression. La variation diurne de la pression (terme

p_{20}) est d'environ 100 Pa. Le rapport des deux ordres de grandeurs sera donc de 20 environ. Ceci signifie que l'effet du terme constant du potentiel gravitationnel sur le terme diurne de la pression vaut quelques 5% de l'effet du terme diurne du potentiel gravitationnel sur le terme constant de la pression. La composante K_1 du moment de force vaut 10^{17} N.m. L'effet concurrent vaut donc 5×10^{15} N.m. C'est un effet négligeable lorsqu'on s'intéresse aux ondes principales.

La table 2.17 regroupe les amplitudes des principales ondes dans le moment des forces lunisolaires sur l'atmosphère. L'application numérique montre que les amplitudes pour la composante axiale sont un ordre de grandeur en dessous de celles des composantes équatoriales, ce qui nous amène à négliger l'effet sur la longueur du jour.

2.6.2 Effet sur la précession-nutation d'une Terre rigide

Le moment des forces lunisolaires sur l'atmosphère modifie le moment cinétique de celle-ci. Ce changement de moment cinétique doit être transmis à la Terre solide avec le signe opposé. On a ainsi :

$$\frac{d\vec{H}_T}{dt} = -\frac{d\vec{H}_A}{dt} - \vec{\Gamma}_g \quad (2.85)$$

où \vec{H}_T et \vec{H}_A sont respectivement les moments cinétiques de la Terre solide et de l'atmosphère. La contribution du moment des forces lunisolaires sur l'atmosphère donne alors une contribution sur le vecteur instantané de rotation de la Terre solide. Pour une excitation de fréquence σ donnée, l'amplitude des composantes du vecteur de rotation sera, en vertu de l'équation de Liouville linéarisée (2.8) :

$$m(\sigma) = -\frac{i\Gamma(\sigma)}{A\Omega(\sigma - \sigma_r)} \quad (2.86)$$

$$m_3(\sigma) = \frac{\Gamma_3(\sigma)}{C\Omega\sigma} \quad (2.87)$$

Les amplitudes du moment de force étant inférieures à 10^{17} N.m, on peut montrer rapidement que seules les composantes rétrogrades diurnes de ce moment de force pourront donner des corrections significatives sur les angles de nutation (plus grandes que $10 \mu\text{as}$). En utilisant les relations cinématiques d'Euler (2.17) et en remarquant que $\sigma_r \ll \Omega$, on obtient, pour ces composantes rétrogrades :

$$\dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta = -\frac{i\Gamma_{0,-}}{A\Omega} e^{-if} \quad (2.88)$$

L'onde K_1 est de fréquence Ω ($f = 0$) et sa partie rétrograde possède la plus forte amplitude (10^{17} N.m). Elle donne naissance à un terme linéaire en Ψ . En utilisant les équations (2.88) et (2.65), on trouve une contribution à la précession en longitude (Ψ)

TAB. 2.17 – Principales ondes dans le moment des forces externes gravitationnelles sur l'atmosphère.

Composante équatoriale		
fréquence (deg/h)	$\Gamma_{0,+}$ (10^{16} N.m)	$\Gamma_{0,-}$ (10^{16} N.m)
Ondes diurnes		
15.041 (K_1)	2.54 - 1.18 i	-10.6
13.943 (O_1)	-1.80 + 0.83 i	7.57
14.957 (P_1)	-0.84 + 0.39 i	3.52
15.043	0.34 - 0.16 i	-1.44
13.940	-0.34 + 0.16 i	1.43
Ondes semi-diurnes		
28.984	0	-8.60 + 0.11 i
30.000 (S_2)	0	-4.00 + 0.05 i
28.440	0	-1.65 + 0.02 i
30.082 (K_2)	0	-1.09 + 0.01 i
Composante axiale		
fréquence (deg/h)	cos (10^{16} N.m)	sin (10^{16} N.m)
ondes diurnes		
15.041 (K_1)	-0.04	-2.50
13.943 (O_1)	0.02	1.78
14.957 (P_1)	0.00	0.84
15.043	0.00	-0.34
13.940	0.00	0.34
ondes semi-diurnes		
28.984	1.00	-2.18
30.000 (S_2)	0.46	-1.02
28.440	0.20	-0.42
30.082 (K_2)	0.12	-0.28

TAB. 2.18 – Effets du moment des forces lunisolaires sur l’atmosphère sur les angles de nutation.

					$\Delta\psi$	$\Delta\epsilon$
l	l'	F	D	Ω	sin	cos
					μas	μas
0	0	0	0	1	-115	46
l	l'	F	D	Ω	$t \times \cos$	$t \times \sin$
					mas/siècle	mas/siècle
0	0	0	0	0	-28	0

de la Terre solide de $-280 \mu\text{as}/\text{an}$ soit -28.0 mas/siècle . Le terme circulaire rétrograde de période 18.6 ans dans le repère céleste donne la contribution principale à la nutation (en 18.6 ans) de $-115 \mu\text{as}$ pour la longitude et $46 \mu\text{as}$ pour l’obliquité. La table 2.18 résume ces effets. Sachant que le niveau de précision du VLBI est de 2 mas/siècle pour la précession et de 0.2 mas pour la nutation, les effets que nous venons d’évaluer sont supérieurs ou de l’ordre de cette limite observationnelle.

2.7 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons évalué les effets moyens de l’atmosphère et des océans sur les paramètres d’orientation terrestre. Nous avons montré que les couches fluides expliquent largement les parties non-prédictibles du mouvement du pôle et de la longueur du jour (excepté les variations décennales de ce dernier), et que l’effet moyen sur les nutations est de l’ordre de quelques dizaines de microsecondes d’arc. Nous avons également montré que les variations des amplitudes des termes périodiques du mouvement du pôle et de la longueur du jour sont fortement corrélées avec les variations correspondantes dans les couches fluides et peuvent donc leur être imputées. Enfin, nous avons montré que le moment de force exercé par la Lune et le Soleil sur l’atmosphère affecte significativement la vitesse de précession de la Terre solide ainsi que l’amplitude de la nutation principale en 18.6 ans.

Chapitre 3

Couplages entre la vitesse de rotation de la Terre et la précession-nutation

Dans le cadre de l'implémentation du nouveau modèle de nutation IAU2000A, il est devenu nécessaire de considérer tous les effets modélisables sur l'orientation terrestre dont les amplitudes atteignent quelques dizaines de microsecondes d'arc. C'est le cas de l'effet des variations de l'ellipticité dynamique de la Terre sur les nutations. Ces variations sont aussi appelées marées zonales puisqu'elles correspondent à un changement du coefficient zonal C_{20} du potentiel gravitationnel de la Terre. Elles induisent, par conservation du moment cinétique de la Terre solide, des variations de la vitesse de rotation qui sont déjà prises en compte dans le calcul du temps universel (UT1). Les fluctuations "zonales" ont été détectées dans les observations (Hefty et Capitaine 1990) et sont modélisées pour des modèles de Terre plus ou moins raffinés (Yoder et al. 1981, Defraigne et Smits 1999) et les amplitudes atteignent 4×10^{-9} pour la variation relative de la durée du jour avec des périodes s'étalant de 5 jours à 18.6 ans.

Cependant, l'effet des marées zonales sur les nutations a été étudié plus récemment. Souchay et Folgueira (1999) ont conclu que l'amplitude du terme de nutation en longitude en 18.6 ans serait diminuée de $168 \mu\text{as}$ à cause des marées zonales. Les autres perturbations sur les termes de nutation sont inférieures à $10 \mu\text{as}$. Le calcul est mené par la méthode hamiltonienne et les variations de la vitesse de rotation sont introduites dans le potentiel perturbateur lunisolaire. Krasinsky (1999) donne des corrections beaucoup plus grandes : selon son étude, menée par le calcul des moments de forces exercés sur la Terre, le terme en 13.66 jours de la nutation en longitude est affecté de 5.11 mas, le terme semi-annuel est modifié de 2.38 mas et le terme en 18.6 ans de 1.07 mas, ce qui est un ordre de grandeur au-dessus de celui des résultats de Souchay et Folgueira. Il faut remarquer que les observations VLBI ne montrent pas des déviations aussi grandes par rapport au modèle de nutation. Bretagnon (2000), par une méthode sensiblement différente des deux précédentes, note une correction de $712 \mu\text{as}$ sur le terme en 18.6 ans de la nutation en obliquité alors que le même terme dans la nutation en longitude est pratiquement insensible.

Compte tenu de ces résultats contradictoires et partiels, il est nécessaire d'entreprendre un calcul rigoureux de ces corrections pour les modéliser avec une précision de l'ordre de

la microseconde de degré, nous avons exprimé les solutions en utilisant les équations de la rotation de la Terre sous différentes formes. Nous utilisons les équations d'Euler-Liouville d'une part, et le formalisme hamiltonien d'autre part. L'originalité de notre travail se trouve en ce que nous allons évaluer cet effet pour une Terre "réelle," c'est à dire constituée par un manteau élastique et un noyau fluide découplé du manteau.

Dans une première Section, nous allons rappeler l'expression des équations de la rotation terrestre, déjà introduites au Chapitre 2, en les développant à l'ordre supérieur afin de faire apparaître le couplage entre la précession-nutation et les variations de l'ellipticité dynamique. Nous les complétons par celles de la démarche hamiltonienne. Puis, après avoir défini les variations zonales dans une seconde Section, nous calculerons leurs effets sur la précession-nutation dans une troisième Section.

3.1 Expressions pour le calcul des nutations

3.1.1 Moment des forces extérieures sur la Terre entière

La formulation suivante pour le potentiel et le moment de force agissant sur la Terre est utilisée dans plusieurs articles (Melchior 1978, Sasao et al. 1980, Mathews et al. 1991a, 1991b, Mathews et Shapiro 1992, Mathews et al. 2002). Le potentiel dû à un corps perturbateur en un point de la Terre dont les coordonnées (x', y', z') sont rapportées au repère équatorial vrai est (Sasao et al. 1980) :

$$\phi(x', y', z') = -\Omega^2(\phi_1 x' z' + \phi_2 y' z') \quad (3.1)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des quantités sans dimension :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{3K^2\mu}{\Omega^2 a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \cos \alpha \\ \phi_2 &= \frac{3K^2\mu}{\Omega^2 a^3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

où K^2 est la constante de gravitation géocentrique¹, μ est le rapport de la masse du corps perturbateur à la masse de la Terre, r est la distance entre le corps perturbateur et le géocentre, δ est la déclinaison du corps perturbateur au dessus de l'équateur et a le demi-grand axe de son orbite autour de la Terre. α est l'ascension droite du corps perturbateur. Les coordonnées équatoriales mobiles α et δ peuvent se convertir en coordonnées écliptiques β (latitude écliptique) et λ (longitude rapportée à l'équinoxe vrai de la date), connaissant l'obliquité ϵ de l'équateur sur l'écliptique, suivant les relations :

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \sin \alpha &= -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \cos \epsilon \sin \lambda \\ \sin \delta &= \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \epsilon \sin \lambda \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹La constante de gravitation géocentrique est souvent notée κ^2 dans la littérature. Toutefois, comme la notation κ sera utilisée plus loin pour le nombre de Love séculaire, nous désignerons la constante de gravitation géocentrique par K^2 .

Le moment des forces de marée sur la Terre entière est alors :

$$\vec{\Gamma} = - \int \rho \vec{r} \times \vec{\nabla} \phi dV \quad (3.4)$$

où ρ est la densité de la Terre et V son volume.

En explicitant le gradient de ϕ en coordonnées cartésiennes et le produit vectoriel, les composantes du moment de force dans le repère équatorial vrai sont :

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= \Omega^2 \int \rho dV (\phi_1 x' y' + \phi_2 y'^2 - \phi_2 z'^2) \\ \Gamma'_2 &= \Omega^2 \int \rho dV (\phi_1 z'^2 - \phi_1 x'^2 - \phi_2 x' y') \\ \Gamma'_3 &= \Omega^2 \int \rho dV (\phi_2 x' z' - \phi_1 y' z') \end{aligned} \quad (3.5)$$

soit, pour les deux premières composantes :

$$\Gamma' = \Gamma_1 + i\Gamma_2 = -i\Omega^2 \phi \left(\int (x'^2 + y'^2) \rho dV - \int (y'^2 + z'^2) \rho dV \right) \quad (3.6)$$

où $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.

On cherche à exprimer le moment des forces dans le repère équatorial vrai en fonction des moments d'inertie de la Terre, connus dans le repère terrestre. La transformation de coordonnées entre repère équatorial vrai et repère terrestre fait intervenir l'angle de rotation sidérale Φ ainsi que le mouvement du pôle x_p et y_p . Si (x, y, z) sont les coordonnées dans le repère terrestre, on a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_1(y_p) R_2(x_p) R_3(-\Phi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

où x_p et y_p sont de l'ordre de 10^{-6} radian.

En explicitant le calcul, on trouve :

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \Phi - y \sin \Phi + x_p z \\ y' &= x \sin \Phi + y \cos \Phi - y_p z \\ z' &= -x_p x + y_p y + z \end{aligned} \quad (3.8)$$

En injectant ces expressions dans les expressions (3.5), on est amené à calculer des intégrales portant sur les coordonnées (x, y, z) et faisant apparaître les moments d'inertie

dont la définition est donnée par l'équation (2.5) au Chapitre 2. Les produits du type $x' \times y'$ aussi bien que les termes x'^2 , y'^2 ou z'^2 donnent lieu à des couplages avec le mouvement du pôle. Ces termes de couplages correspondent en fait à un incrément d'inertie δc dans une direction donnée dû au fait qu'on a basculé légèrement les axes du repère pour passer du repère équatorial vrai au repère terrestre. Nous avons montré que ces incréments d'inertie correspondent à une variation relative $\delta c/C$ de l'ordre de 10^{-11} radian, ce qui est trois ordres de grandeur en dessous des variations $\delta C/C$ dûes aux marées zonales (qui sont de l'ordre de 10^{-8} radian). On peut donc négliger ces couplages.

Dans le cas où l'on néglige la triaxialité ($c_{11} = c_{22}$), la distribution des masses de la Terre présente une symétrie de révolution autour de Oz , de telle sorte que le changement de coordonnées de (x', y') vers (x, y) n'affecte pas les intégrales de l'expression (3.5). Celles-ci s'identifient aux moments d'inertie totaux $\mathcal{C} = C + c_{33}$ et $\mathcal{A} = A + c_{11}$. On a donc :

$$\Gamma' = -i\Omega^2(\mathcal{C} - \mathcal{A})\phi \quad (3.9)$$

où $\phi = \phi_1 + i\phi_2$, soit :

$$\begin{aligned} \Gamma'_1 &= -\frac{3K^2\mu}{a^3}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \sin \alpha \\ \Gamma'_2 &= \frac{3K^2\mu}{a^3}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \cos \alpha \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cette expression se décompose en une partie d'ordre 1 associées aux valeurs moyennes des moments d'inertie :

$$\Gamma'^{(1)} = -i\Omega^2(C - A)\phi \quad (3.11)$$

qui est le moment de force lunisolaire considéré dans le calcul usuel de la précession-nutation et qui ne tient pas compte des écarts à l'ellipsoïde.

La partie d'ordre supérieur du moment de force, dûe aux écarts c_{ij} à l'ellipsoïde, est :

$$\Gamma'^{(2)} = -i\Omega^2(c_{33} - c_{11})\phi \quad (3.12)$$

Le moment des forces Γ' dans le repère équatorial fixe est relié au moment des forces Γ dans le repère terrestre (repère tournant) par la relation :

$$\Gamma = \Gamma' e^{-i\Phi} \quad (3.13)$$

où Φ est l'angle de rotation de la Terre vérifiant, selon la troisième relation cinématique d'Euler :

$$\dot{\Phi} = \Omega(1 + m_3) - \dot{\Psi} \cos \theta \quad (3.14)$$

3.1.2 Equations pour une Terre homogène et élastique

Considérons la Terre dont la matrice d'inertie est définie dans le Chapitre 2 (équation (2.4)), et soumise à un moment de force extérieur $\vec{\Gamma}$. L'équation de la dynamique s'écrit, dans le repère terrestre :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{\Gamma} \quad (3.15)$$

Les composantes du moment cinétique \vec{H} , tout comme celles du moment de force $\vec{\Gamma}$, doivent être exprimées dans ce même repère terrestre.

Dans le précédent Chapitre, nous avons négligé les termes du second ordre dans le développement de l'équation (3.15) et obtenu ainsi une forme linéarisée de l'équation de Liouville. Si nous gardons tous les termes, la forme obtenue est plus complexe. Le moment cinétique \vec{H} s'écrit comme la somme d'un terme d'ordre 0, correspondant à la rotation moyenne de la Terre, d'un terme d'ordre 1, correspondant aux variations du vecteur instantané de rotation et des incréments d'inertie c_{ij} , et enfin un terme d'ordre 2 contenant les couplages entre les quantités m_i et les quantités c_{ij} :

$$\vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)} \quad (3.16)$$

avec :

$$\vec{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\Omega \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\vec{H}^{(1)} = \Omega \begin{pmatrix} Am_1 + c_{13} \\ Am_2 + c_{23} \\ Cm_3 + c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\vec{H}^{(2)} = \Omega \begin{pmatrix} c_{11}m_1 + c_{12}m_2 + c_{13}m_3 \\ c_{21}m_1 + c_{22}m_2 + c_{23}m_3 \\ c_{31}m_1 + c_{32}m_2 + c_{33}m_3 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Les dérivées temporelles sont :

$$\dot{\vec{H}}^{(0)} = \vec{0} \quad (3.20)$$

$$\vec{H}^{(1)} = \Omega \begin{pmatrix} A\dot{m}_1 + \dot{c}_{13} \\ A\dot{m}_2 + \dot{c}_{23} \\ C\dot{m}_3 + \dot{c}_{33} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\vec{H}^{(2)} = \Omega \begin{pmatrix} \dot{c}_{11}m_1 + \dot{c}_{12}m_2 + \dot{c}_{13}m_3 + c_{11}\dot{m}_1 + c_{12}\dot{m}_2 + c_{13}\dot{m}_3 \\ \dot{c}_{21}m_1 + \dot{c}_{22}m_2 + \dot{c}_{23}m_3 + c_{21}\dot{m}_1 + c_{22}\dot{m}_2 + c_{23}\dot{m}_3 \\ \dot{c}_{31}m_1 + \dot{c}_{32}m_2 + \dot{c}_{33}m_3 + c_{31}\dot{m}_1 + c_{32}\dot{m}_2 + c_{33}\dot{m}_3 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ se décompose aussi en un terme d'ordre 0 (vitesse de rotation moyenne) et d'ordre 1 (variations) :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(0)} + \vec{\omega}^{(1)} \quad (3.23)$$

avec :

$$\vec{\omega}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$\vec{\omega}^{(1)} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{H}$ s'écrit, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{H} &= (\vec{\omega}^{(0)} + \vec{\omega}^{(1)}) \times (\vec{H}^{(0)} + \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)}) \\ &= \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(0)} + \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \times \vec{H}^{(0)} + \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(2)} + \vec{\omega}^{(1)} \times \vec{H}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

soit, pour chacune des contributions d'ordre 0, 1 et 2 respectivement :

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(0)} = \vec{0} \quad (3.27)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(1)} = \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2 - c_{23} \\ -(C - A)m_1 + c_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(2)} = \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2m_3 + c_{21}m_1 + c_{22}m_2 + c_{33}m_2 \\ -(C - A)m_1m_3 - c_{11}m_1 - c_{12}m_2 - c_{33}m_1 \\ c_{23}m_1 - c_{13}m_2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Avec cette décomposition, l'équation (3.15) peut se réécrire :

$$\frac{d\vec{H}^{(1)}}{dt} + (\vec{\omega} \times \vec{H})^{(1)} = \vec{\Gamma}^{(1)} + \vec{K} \quad (3.30)$$

où le vecteur \vec{K} contient tous les termes d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \vec{K} &= -\dot{\vec{H}}^{(2)} - (\vec{\omega} \times \vec{H})^{(2)} + \vec{\Gamma}^{(2)} \\ &= -\dot{\vec{H}}^{(2)} - \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(2)} - \vec{\omega}^{(1)} \times \vec{H}^{(1)} + \vec{\Gamma}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'équation (3.30) est l'équation de Liouville complète. Si l'on ne considère par \vec{K} , on obtient l'équation de Liouville linéarisée telle qu'on l'utilise habituellement.

Les deux premiers termes de \vec{K} , peuvent être négligés dans le cas de la composante équatoriale. En effet, la combinaison $\dot{\vec{H}}^{(2)} + \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(2)}$ devient, pour un moment cinétique équatorial sous la forme d'un terme circulaire de fréquence σ , $(\Omega + \sigma)H^{(2)}$. Or, pour les nutations principales (de périodes 18.6 ans ou 9.3 ans dans l'espace), σ (fréquence dans la Terre) est rétrograde diurne et avoisine $-\Omega$. Ainsi, outre le fait que le moment cinétique lui-même est très petit (ordre 2, on s'attend à des effets de l'ordre de la dizaine de microseconde d'arc), la présence de la quantité $\Omega + \sigma$ abaisse encore la valeur du terme et celui-ci peut donc être omis.

Le terme restant dans \vec{K} , soit $\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{H}^{(1)}$ correspond à un couplage entre les variations de la vitesse de rotation de la Terre (la quantité m_3) et les composantes équatoriales du vecteur de rotation (soit m_1 et m_2) :

$$\vec{K} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2m_3 \\ -(C - A)m_1m_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Finalement, on obtient pour (3.30) l'expression plus simple :

$$\begin{aligned} \Omega \begin{pmatrix} A\dot{m}_1 + \dot{c}_{13} \\ A\dot{m}_2 + \dot{c}_{23} \\ C\dot{m}_3 + \dot{c}_{33} \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2 - c_{23} \\ -(C - A)m_1 + c_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \\ + \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2m_3 \\ -(C - A)m_1m_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)} + \Gamma_1^{(2)} \\ \Gamma_2^{(1)} + \Gamma_2^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

dont la composante équatoriale constitue l'équation de Liouville, en notation complexe ($m = m_1 + im_2$, $c = c_{13} + ic_{23}$ et $\Gamma = \Gamma_1 + i\Gamma_2$) :

$$\dot{m} - i\sigma_r(1 + m_3)m + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} = \frac{\Gamma}{A\Omega} = -i(\sigma_r + \delta)\phi \quad (3.34)$$

où $\sigma_r = \frac{C-A}{A}\Omega$ est la fréquence d'Euler, dont la valeur est fixée par les moments d'inertie moyens et δ l'écart à la fréquence d'Euler lié aux variations des moments d'inertie :

$$\delta = \frac{c_{33} - c_{11}}{A}\Omega \quad (3.35)$$

Pour une Terre rigide et ellipsoïdale (c est nul) cette équation devient :

$$\dot{m} - i\sigma_r(1 + m_3)m = \frac{\Gamma}{A\Omega} = -i(\sigma_r + \delta)\phi \quad (3.36)$$

Elle se décompose en une équation comprenant les effets du premier ordre :

$$\dot{m} - i\sigma_r m = \frac{\Gamma^{(1)}}{A\Omega} \quad (3.37)$$

et une équation contenant les effets du second ordre, à savoir les couplages et les variations du couple dûes à l'excédent δ :

$$\dot{m}^{(2)} - i\sigma_r(1 + m_3)m^{(2)} = \frac{\Gamma^{(2)}}{A\Omega} \quad (3.38)$$

Cette équation se résout analytiquement. Ce sera l'objet d'une Section ultérieure dans laquelle nous calculerons les effets des couplages et autres effets du second ordre dûs au terme $\delta\phi$. Nous montrerons que ces effets sont de l'ordre de $100 \mu\text{as}$ pour la nutation principale. Toutefois, ce qui nous importe à présent, c'est de calculer l'effet supplémentaire provenant du modèle de Terre. Soit, comment une amplitude de nutation pour une Terre rigide est-elle modifiée lorsque l'on passe à une Terre à manteau élastique, ou bien à une Terre réelle, c'est à dire avec manteau élastique et noyau fluide? Compte tenu de la petitesse des effets du second ordre (couplage et variations de l'ellipticité dynamique), nous pouvons ne pas considérer ces termes dans les équations pour des modèles de Terre plus complexes.

Ainsi, pour un modèle de Terre rigide régi par l'équation (3.37), dans l'espace des fréquences, c'est à dire lorsqu'on considère que les fonctions du temps ont la forme de

termes circulaires de fréquence σ , on a une relation entre les amplitudes complexes pour m et pour ϕ :

$$m(\sigma) = -\frac{\sigma_r}{\sigma - \sigma_r} \phi(\sigma) \quad (3.39)$$

Dans le cas d'une Terre élastique, nous écrirons l'équation au premier ordre suivante :

$$\dot{m} - i\sigma_r m + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} = \frac{\Gamma^{(1)}}{A\Omega} = -i\sigma_r \phi \quad (3.40)$$

L'incrément d'inertie c s'exprime alors en fonction du potentiel et du vecteur de rotation (Sasao et al. 1980) :

$$c = A\kappa(m - \phi) \quad (3.41)$$

ce qui nous permet de réécrire l'équation (3.34) dans le domaine des fréquences :

$$m(\sigma) = \frac{\kappa\sigma - (\sigma_r - \kappa\Omega)}{\sigma(1 + \kappa) - (\sigma_r - \kappa\Omega)} \phi(\sigma) \quad (3.42)$$

On pose alors :

$$\sigma_{me} = \frac{\sigma_r - \kappa\Omega}{1 + \kappa} \simeq 0.68 \times \sigma_r \quad (3.43)$$

qui est la fréquence d'Euler dont la période est modifiée par un facteur d'échelle fonction de l'élasticité du manteau (l'indice me est mis pour "manteau élastique"). Sa nouvelle période est d'environ 451 jours.

La relation précédente s'écrit alors :

$$m(\sigma) = -\frac{\sigma_{me}}{\sigma - \sigma_{me}} \phi(\sigma) \quad (3.44)$$

Le rapport entre l'amplitude m_r pour une Terre rigide et m_{me} pour une Terre à manteau élastique s'écrit au premier ordre :

$$\frac{m_{me}}{m_r} = \frac{\sigma_{me}}{\sigma_r} \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma - \sigma_{me}} \quad (3.45)$$

soit, pour des fréquences σ typiquement diurnes (ce qui est le cas pour la nutation) :

$$\frac{m_{me}}{m_r} = \frac{\sigma_{me}}{\sigma_r} \simeq 0.68 \quad (3.46)$$

ce qui est un simple facteur d'échelle.

3.1.3 Equations pour un modèle de Terre avec manteau élastique et noyau liquide découplé

Les calculs que nous avons menés jusqu'à présent étaient relatifs à un modèle de Terre simplifiée élastique et homogène. Pour se rapprocher d'une Terre réelle, nous devons considérer un manteau élastique dont les moments d'inertie principaux sont C_m et A_m et un noyau liquide de moments d'inertie principaux C_f et A_f . On suppose que ce noyau est découplé, c'est à dire que le liquide du noyau peut tourner en bloc par rapport au manteau sans affecter sa vitesse de rotation et inversement. Autrement dit, si la vitesse de rotation du manteau est augmentée de δm_3 , celle du noyau est augmentée de $m_3^f = -\delta m_3$. Réciproquement, un incrément m_3^f de la vitesse du noyau par rapport au manteau laisse m_3 inchangé.

Equations pour la Terre entière

Le moment cinétique de la Terre globale s'écrit comme la somme d'un moment cinétique global et d'un moment cinétique relatif qui représente la rotation du noyau fluide. Le moment cinétique de la Terre globale est le produit de la matrice d'inertie par le vecteur instantané de rotation, et le moment cinétique relatif (que nous indexons par f puisqu'il est relatif au noyau "fluide") est le produit de la matrice d'inertie du noyau par son vecteur de rotation. Le noyau est considéré comme une ellipsoïde déformable et sa matrice d'inertie s'écrit :

$$\bar{I}_f = \begin{pmatrix} A_f & 0 & 0 \\ 0 & A_f & 0 \\ 0 & 0 & C_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}^f & c_{12}^f & c_{13}^f \\ c_{21}^f & c_{22}^f & c_{23}^f \\ c_{31}^f & c_{32}^f & c_{33}^f \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Son vecteur instantané de rotation s'écrit :

$$\vec{\omega}_f = \Omega \begin{pmatrix} m_1^f \\ m_2^f \\ m_3^f \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Le moment cinétique total de la Terre est la somme du moment cinétique de la Terre entière et de l'incrément de moment cinétique relatif causé par le noyau :

$$\vec{H} = \bar{I}\vec{\omega} + \bar{I}_f\vec{\omega}_f \quad (3.49)$$

soit :

$$\vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \vec{H}^{(1)} + \vec{H}^{(2)} \quad (3.50)$$

avec :

$$\vec{H}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\Omega \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\vec{H}^{(1)} = \Omega \begin{pmatrix} Am_1 + A_fm_1^f + c_{13} \\ Am_2 + A_fm_2^f + c_{23} \\ Cm_3 + C_fm_3^f + c_{33} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Nous n'écrivons pas ici l'ordre 2 du moment cinétique puisque nous avons montré plus haut que le terme $\vec{H}^{(2)} + \vec{\omega}^{(0)} \times \vec{H}^{(2)}$ pouvait être négligé. Nous ferons de même lorsque nous expliciterons le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{H}$ et nous garderons seulement la partie "utile" de l'ordre 2 (c'est à dire celle qui ne s'annulera pas par compensation des termes entre eux), afin d'alléger l'écriture.

Les dérivées temporelles sont :

$$\dot{\vec{H}}^{(0)} = \vec{0} \quad (3.53)$$

$$\dot{\vec{H}}^{(1)} = \Omega \begin{pmatrix} A\dot{m}_1 + A_f\dot{m}_1^f + \dot{c}_{13} \\ A\dot{m}_2 + A_f\dot{m}_2^f + \dot{c}_{23} \\ C\dot{m}_3 + C_f\dot{m}_3^f + \dot{c}_{33} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Le produit vectoriel $\vec{\omega} \times \vec{H}$ s'écrit, pour des termes allant jusqu'à l'ordre 2 :

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(0)} = \vec{0} \quad (3.55)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(1)} = \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2 - A_fm_2^f - c_{23} \\ -(C - A)m_1 + A_fm_1^f + c_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{H})^{(2)} = \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2m_3 + C_fm_2m_3^f - A_fm_3m_2^f \\ -(C - A)m_1m_3 - C_fm_1m_3^f + A_fm_3m_1^f \\ A_f(m_1m_2^f - m_2m_1^f) \end{pmatrix}$$

Nous appliquons les mêmes considérations simplificatrices qu'au premier paragraphe de ce Chapitre ainsi que la condition de découplage qui stipule que le noyau ne tourne pas avec le manteau, soit $m_3^f = -m_3$. L'équation de la dynamique se réduit alors à :

$$\begin{aligned} & \Omega \begin{pmatrix} A\dot{m}_1 + A_f\dot{m}_1^f + \dot{c}_{13} \\ A\dot{m}_2 + A_f\dot{m}_2^f + \dot{c}_{23} \\ C\dot{m}_3 + C_f\dot{m}_3^f + \dot{c}_{33} \end{pmatrix} + \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2 - A_fm_2^f - c_{23} \\ -(C - A)m_1 + A_fm_1^f + c_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \Omega^2 \begin{pmatrix} (C - A)m_2m_3 + C_fm_2m_3^f - A_fm_3m_2^f \\ -(C - A)m_1m_3 - C_fm_1m_3^f + A_fm_3m_1^f \\ A_f(m_1m_2^f - m_2m_1^f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne, pour la partie équatoriale, une équation à rapprocher de l'équation simplifiée trouvée en (3.40) relative à une Terre homogène :

$$\begin{aligned} \dot{m} - i\sigma_r m + \frac{A_f}{A}\dot{m}_f + i\Omega\frac{A_f}{A}m_f \\ + \frac{\dot{c} + i\Omega c}{A} = \frac{\Gamma^{(1)}}{A\Omega} = -i\sigma_r\phi \end{aligned} \quad (3.57)$$

Equations relatives au noyau

La conservation du moment cinétique pour le noyau liquide (aussi appelé noyau fluide externe, en anglais Free Outer Core, FOC, ainsi nommé car il est l'enveloppe externe de la graine solide interne, en anglais Solid Inner Core, SIC) s'écrit :

$$\frac{d\vec{H}_f}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{H}_f = \vec{\Gamma}_f \quad (3.58)$$

où $\vec{H}_f = \underline{I}_f\vec{\omega}_f$. La quantité $\vec{\Gamma}_f$ est le moment de force total agissant sur le noyau. Il comprend donc le moment des forces lunisolaires ainsi qu'un moment de force d'interaction entre le noyau et le manteau.

On montre que (voir par exemple Sasao et al. 1980, equation (32), ou de Viron 1998 pour une explication plus détaillée de la démonstration) :

$$\dot{m} + \dot{m}_f - i\sigma_fm_f + i\Omega m_f + \frac{\dot{c}^f}{A_f} = 0 \quad (3.59)$$

où $\sigma_f = \Omega(C_f - A_f)/A_f$.

Les équations (3.57) et (3.59) constituent un système couplé décrivant la dynamique de la Terre globale et de son noyau liquide. On peut résoudre ces équations simultanément pour obtenir la solution en m . Pour simplifier les calculs, nous allons les considérer au premier ordre seulement, l'effet des termes du second ordre n'étant que de quelques microsecondes d'arc. Les incréments d'inertie de la Terre entière et du noyau sont reliés aux quantités m , m^f et ϕ au moyen des coefficients sans dimension κ (nombre de Love séculaire), ξ , γ et β introduits par Sasao et al. (1980) :

$$c = A\kappa(m - \phi) + A\xi m_f \quad (3.60)$$

et :

$$c^f = A_f\gamma(m - \phi) + A_f\beta m_f \quad (3.61)$$

ce qui permet de simplifier (3.57) et (3.59). En faisant les approximations suffisantes, sachant que les coefficients κ , ξ , γ et β sont de l'ordre de 10^{-3} (voir en Annexe E pour les valeurs de ces coefficients), on obtient dans le domaine fréquentiel :

$$m(\sigma) = -\frac{\sigma_{cw}}{\Omega} \frac{\sigma' - (A_m/A)\sigma'_{FCN}}{\sigma' - \sigma'_{FCN}} \phi(\sigma) \quad (3.62)$$

où A_m est le moment d'inertie équatorial du manteau ($A_m = A - A_f$) et $\sigma' = \sigma + \Omega$ est la fréquence calculée dans l'espace. La fréquence de résonance σ'_{FCN} est donnée par :

$$\sigma'_{FCN} = \frac{A}{A_m}(\sigma_f - \beta\Omega) \quad (3.63)$$

Elle correspond à une nutation libre du noyau liquide (Free Core Nutation) avec une période d'environ 430 jours dans l'espace. La fréquence σ_{cw} est la fréquence de Chandler et vaut :

$$\sigma_{cw} = \frac{A}{A_m} \frac{\sigma_r - \kappa\Omega}{1 + \kappa} \simeq 0.77 \times \sigma_r \quad (3.64)$$

et correspond à une période proche de 400 jours dans la Terre.

La fonction de transfert entre les amplitudes de m_r pour la Terre rigide et m_{nr} pour la Terre réelle est, au premier ordre :

$$\frac{m_{nr}}{m_r} = \frac{\sigma_{cw}}{\sigma_r} \frac{\sigma' - (A_m/A)\sigma'_{FCN}}{\sigma' - \sigma'_{FCN}} \quad (3.65)$$

Dans notre cas où nous allons étudier de petits effets et où les termes dont les fréquences sont proches de σ'_{FCN} sont très petits, on peut écrire :

$$\frac{m_{nr}}{m_r} \simeq \frac{\sigma_{cw}}{\sigma_r} \simeq 0.77 \quad (3.66)$$

ce qui revient à un simple facteur d'échelle entre les amplitudes.

3.1.4 Méthode hamiltonienne (ou lagrangienne) pour le calcul des nutations d'une Terre rigide

Les calculs des nutations d'une Terre rigide par les méthodes lagrangiennes et hamiltoniennes sont largement exposés dans les articles de Woolard (1953) et de Kinoshita (1977). Ces deux méthodes conduisent aux mêmes résultats : les variations des angles

d'Euler sont reliées aux dérivées du potentiel externe U . Ce potentiel est en fait l'énergie potentielle de marée intégrée sur toute la Terre :

$$U = \frac{K^2 \mu}{r^3} (C - A) P_{20}(\sin \delta) = \frac{K^2 \mu}{a^3} (C - A) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \delta - 1) \quad (3.67)$$

Les variations des angles d'Euler sont données par les relations :

$$\Delta \Psi = - \int \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} dt \quad (3.68)$$

et :

$$\Delta \theta = - \int \frac{1}{G \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} dt \quad (3.69)$$

où G est le moment cinétique total de la Terre rigide. L'approximation $G = C\Omega$ est suffisante pour nos opérations, de même que le sinus de l'obliquité θ au dénominateur peut être pris égal à sa valeur moyenne à J2000.0 $\sin \theta_0 = -\sin \epsilon_0$. En explicitant le potentiel U (voir Kinoshita 1977) sous la forme :

$$U = \frac{K^2 \mu}{a^3} (C - A) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) P_{20}(\sin \beta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sin 2\theta P_{21}(\sin \beta) \sin \lambda \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \sin^2 \theta P_{22}(\sin \beta) \cos 2\lambda \right] \quad (3.70)$$

les dérivées $\dot{\Psi}$ et $\dot{\theta}$ deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \frac{3K^2 \mu}{C\Omega a^3} (C - A) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ &\times (\sin \theta \cos \beta \sin \lambda + \cos \theta \sin \beta) \\ &\times (\cot \theta \cos \beta \sin \lambda - \sin \beta) \end{aligned} \quad (3.71)$$

et :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{3K^2 \mu}{C\Omega a^3} (C - A) \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\ &\times (\sin \theta \cos \beta \sin \lambda + \cos \theta \sin \beta) \\ &\times \cos \beta \cos \lambda \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.2 Variations de l'ellipticité dynamique dûes aux marées zonales

Les marées zonales sont des variations de l'ellipticité dynamique H_d , c'est à dire des variations des moments d'inertie principaux de la Terre. Dans le cas des variations zonales, la symétrie de révolution de la Terre n'est pas affectée et $\delta A = \delta B$. On peut alors montrer que la trace du tenseur d'inertie reste constante au cours du temps (Melchior 1978), soit $\delta(2A + C) = 0$, ou encore :

$$\delta A = -\frac{1}{2}\delta C \quad (3.73)$$

d'où l'on tire la valeur de l'ellipticité dynamique en fonction de la seule variation du moment d'inertie axial :

$$\delta H_d = \delta \left(\frac{C - A}{C} \right) = \frac{3}{2} \frac{\delta C}{C} \quad (3.74)$$

En écrivant la conservation du moment cinétique, on montre que la quantité $\delta C/C$ est reliée aux variations de la longueur du jour (LOD) et à celles de la composante axiale m_3^z du vecteur instantané de rotation, où l'exposant z désigne le fait que ces variations sont imputées aux marées zonales, parmi d'autres variations :

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{\delta LOD}{LOD} = -m_3^z \quad (3.75)$$

Dans le cas des variations zonales s'écrivant comme une somme de termes périodiques, on aura, pour l'expression analytique de m_3^z :

$$m_3^z = \sum [A_s \sin \sigma t + A_c \cos \sigma t] \quad (3.76)$$

Deux chemins s'offrent à nous. La première option consiste à calculer un modèle pour les variations pour $\delta C/C$ puisque celles-ci sont reliées au potentiel excitateur lunisolaire (Melchior 1978, table 3.1), c'est la démarche qui a été utilisée par Souchay et Folgueira (1999). La seconde option consiste à utiliser un modèle pour les variations zonales de la rotation terrestre, tel, par exemple, celui donné dans les IERS Conventions 2000 pour les variations de UT1, ce modèle étant calculé pour une Terre à manteau élastique, noyau liquide découplé et océan en équilibre (Defraigne et Smits 1999)². Les valeurs données dans les IERS Conventions 2000 sont les excès de UT1, de LOD ou de la quantité m_3^z et peuvent être aisément converties en excès de $\delta C/C$ (table 3.1).

²D'autres modèles sont disponibles comme celui de Yoder et al. (1996) qui diffère de celui de Defraigne et Smits (1999) au maximum de moins de 1 pour cent en valeur relative sur le terme le plus important (en 13.66 jours).

TAB. 3.1 – Principaux termes dans les variations de LOD (μs) et de $\delta C/C$ (μas) issues des IERS Conventions 2000 et comparaison avec le $\delta C/C$ calculé par la formule de Melchior (1978) (désigné par M78 dans le tableau).

					Période	δLOD		$\delta C/C$		$\delta C/C$ M78
l	l'	F	D	Ω	jours	sin	cos	sin	cos	cos
0	0	2	0	2	13.66	2.2	358.4	5.1	855.7	816.2
1	0	0	0	0	27.56	1.3	189.9	3.1	453.4	431.1
0	0	2	-2	2	182.62	1.5	168.8	3.7	403.1	379.1
0	0	0	0	1	6798.38	2.3	-156.2	5.7	-372.8	-342.0
0	0	2	0	1	13.63	0.9	148.6	2.3	354.7	338.3
1	0	2	0	2	9.13	0.4	68.5	0.9	163.5	156.3
...

3.3 Effets de couplage avec la précession-nutation

Les équations de la dynamique de la rotation terrestre (équations de Liouville ou bien équations issues des méthodes hamiltonienne ou lagrangienne) font apparaître des couplages entre les variations de la vitesse de rotation (composante axiale du vecteur instantané de rotation) et les quantités relatives à l'orientation de la Terre dans l'espace (composantes équatoriales du vecteur instantané de rotation ou angles de nutation). Le but de la Section qui suit est de connaître les effets de ces couplages. Nous considérerons les variations de la vitesse de rotation modélisées dûes aux marées zonales m_3^z , elle-même reliée à l'ellipticité dynamique.

3.3.1 Résolution hamiltonienne

Cette approche consiste à faire varier l'ellipticité dynamique H_d (ce qui est identique à introduire la vitesse de rotation m_3^z) dans les équations hamiltoniennes (3.71) et (3.72) de la rotation de la Terre rigide, ce qui n'est pas rigoureux dans la mesure où de telles équations ne sont pas adaptées à l'étude d'un processus non rigide. Néanmoins, cela nous donne un ordre de grandeur du phénomène.

Compte tenu de la relation (3.75), l'incrément du potentiel pour un changement δC du moment d'inertie axial est :

$$\delta U = \frac{3K^2 \mu C}{2a^3} \frac{\delta C}{C} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \delta - 1) \quad (3.77)$$

et les dérivées des angles d'Euler $\dot{\Psi}$ et $\dot{\theta}$ dans le repère équatorial vrai sont incrémentées d'après (3.71) et (3.72) de :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\Psi} &= -\frac{9K^2\mu}{2\Omega a^3} \frac{\delta C}{C} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\
&\times (\sin \theta_0 \cos \beta \sin \lambda + \cos \theta_0 \sin \beta) \\
&\times (\cotg \theta_0 \cos \beta \sin \lambda - \sin \beta)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

et :

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\theta} &= -\frac{9K^2\mu}{2\Omega a^3} \frac{\delta C}{C} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \\
&\times (\sin \theta_0 \cos \beta \sin \lambda + \cos \theta_0 \sin \beta) \\
&\times \cos \beta \cos \lambda
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Souchay et Folgueira (1999) ont utilisé ces expressions pour calculer l'effet des marées zonales sur les nutations en considérant un modèle pour $\delta C/C$ associé à un modèle de Terre élastique. La quantité $\delta C/C$ est en effet reliée au potentiel perturbateur lunisolaire (Melchior 1978) :

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{2}{3} \kappa_c \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_{20}(\sin \delta) \tag{3.80}$$

où le nombre sans dimension κ_c est égal au nombre de Love k_2 multiplié par un coefficient dépendant du corps perturbateur (1.683×10^{-7} pour la Lune et 7.750×10^{-8} pour le Soleil) et où δ est la déclinaison vraie de la Lune ou du Soleil. Ce modèle pour $\delta C/C$ diffère d'un maximum de 5% par rapport au modèle des IERS Conventions 2000 (voir la table 3.1) et constitue une bonne approximation si l'on considère que les effets auxquels nous nous intéressons sont de l'ordre de la centaine de microsecondes d'arc.

Nous avons implémenté ce calcul en utilisant successivement une modélisation de $\delta C/C$ au moyen de la formule précédente (3.80) et le modèle des IERS Conventions 2000. Le potentiel lunisolaire a été établi à partir des théories ELP2000 de la Lune (Chapront-Touze et al. 1983, Chapront-Touze et Chapront 1985) et VSOP87 pour le système solaire (Bretagnon et Francou 1988) et le logiciel GREGOIRE a été utilisé pour la manipulation de ces séries de Poisson. La table 3.2 résume les contributions supérieures à la microseconde d'arc. L'utilisation du modèle des IERS Conventions 2000 (DS99) pour les variations zonales agit principalement sur le terme en 18.6 ans en l'augmentant, en valeur absolue, de quelques 13 microsecondes d'arc par rapport au même terme issu de la modélisation (3.80). La dépendance au modèle de $\delta C/C$ n'est pratiquement plus sensible sur les autres termes où elle se borne à quelques dixièmes de microsecondes d'arc.

Par cette méthode, on trouve une contribution à la précession en longitude de -4064.3 μas par siècle en recalculant $\delta C/C$ par la formule (3.80), et -4278.5 μas par siècle en prenant le modèle de Defraigne et Smits (1999). Cette correction à la précession n'est pas mentionnée dans Souchay et Folgueira (1999).

TAB. 3.2 – Effets des marées zonales sur la nutation (μas) calculés par la méthode hamiltonienne. SF99 : Souchay et Folgueira 1999 ; L03 : cette étude avec calcul d’un modèle pour $\delta C/C$ par la formule (3.80) ; L03+DS99 : cette étude avec utilisation du modèle de Defraigne et Smits (1999) pour les variations de la vitesse de rotation.

					SF99		L03		L03+DS99			
					$\Delta\psi$	$\Delta\epsilon$	$\Delta\psi$	$\Delta\epsilon$	$\Delta\psi$	$\Delta\epsilon$		
l	l'	F	D	Ω	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos
0	0	0	0	1	168.0	-9.0	168.0	-8.5	181.0	2.1	0.2	-8.9
0	0	0	0	2	4.5	-2.8	4.0	-2.6	4.3	0.0	0.0	-2.8
0	0	2	-2	2	3.2	0.6	3.2	0.0	3.4	0.0	0.0	0.0

3.3.2 Résolution par les équations de Liouville

On se propose de calculer l’effet des variations de l’ellipticité dynamique sur les angles de nutation par une méthode basée sur l’utilisation des équations de Liouville très simplifiées au second ordre telles que nous les avons établies en (3.36) pour une Terre rigide, en (3.34) pour une Terre homogène et élastique et enfin en (3.57) pour une Terre comportant un manteau élastique et un noyau fluide. La première partie de l’approche utilisant les équations de la Terre rigide peut paraître inadaptée puisqu’on résoud en fait les équations de la Terre rigide pour une Terre qui n’est précisément pas rigide. En cela, elle s’apparente à l’approche hamiltonienne. Toutefois, il s’agit dans notre étude de voir les effets engendrés par les variations d’ellipticité dynamique, et il nous a paru intéressant de tester cette approche, avant de raffiner le modèle et d’inclure les effets de la non-rigidité et de voir les effets de l’élasticité sur les amplitudes. Cette approche très simplifiée est également primordiale car elle permet de comprendre certains couplages principaux et certaines subtilités du calcul pouvant aboutir à des erreurs.

Solution pour un modèle de Terre simplifié

L’équation de la dynamique pour l’axe de rotation s’écrit dans le repère terrestre (voir l’équation (3.36)) :

$$\dot{m} - i\sigma_r(1 + m_3)m = \frac{\Gamma}{A\Omega} = \frac{\Gamma'}{A\Omega}e^{-i\Phi} \quad (3.81)$$

A ce niveau, nous allons souligner trois points importants.

- Premièrement, le moment de force est proportionnel à l’ellipticité dynamique et subira donc un incrément dû aux changements de cette ellipticité dynamique (ou bien aux changements induits dans la vitesse de rotation selon la relation (3.75)) :

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma'_1 &= \Gamma_1'^{(2)} = -\frac{9K^2\mu C}{2a^3} \frac{\delta C}{C} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \sin \alpha \\
\delta\Gamma'_2 &= \Gamma_2'^{(2)} = \frac{9K^2\mu C}{2a^3} \frac{\delta C}{C} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \cos \alpha \\
\delta\Gamma'_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.82}$$

soit, en utilisant la relation (3.75) :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1'^{(2)} &= \frac{9K^2\mu C}{2a^3} m_3^z \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \sin \alpha \\
\Gamma_2'^{(2)} &= -\frac{9K^2\mu C}{2a^3} m_3^z \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin \delta \cos \delta \cos \alpha \\
\Gamma_3'^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{3.83}$$

La table 3.3 regroupe les valeurs des termes des développements pour les quantités $\Gamma_1'^{(2)}/A\Omega$ et $\Gamma_2'^{(2)}/A\Omega$ supérieurs à 10^{-9} radian par siècle.

Employer le terme de "couplage" pour parler de cet effet n'est pas judicieux, car il ne s'agit pas à proprement parler d'un couplage entre la composante axiale du vecteur de rotation et sa composante équatoriale, mais d'un effet des variations de l'ellipticité dynamique (qui possède un effet équivalent sur la vitesse de rotation) sur cette composante équatoriale.

- Deuxièmement, le produit membre de gauche de l'équation de Liouville (3.81) contient le produit $m \times m_3$. On peut parler ici de couplage. On peut montrer que les contributions de ce produit sont au plus égales à quelques microsecondes d'arc. En conséquence, nous pouvons ignorer ce terme par la suite et nous rajouterons ses effets à la fin de cette Section. Considérons donc l'équation :

$$\dot{m} - i\sigma_r m = \frac{\Gamma'}{A\Omega} e^{-i\Phi} \tag{3.84}$$

- Troisièmement, le moment de force est affecté d'une rotation $e^{-i\Phi}$ pour que ses composantes soient exprimées dans le repère terrestre et l'angle Φ (angle de rotation de la Terre) contient aussi les variations zonales. La rotation inverse $e^{i\Phi}$ est appliquée une fois qu'on a résolu le système pour m et pour obtenir les angles d'Euler.

La solution générale de l'équation (3.84) sans second membre est :

$$m = K_r e^{i\sigma_r t} \tag{3.85}$$

où le coefficient complexe K_r dépend des conditions initiales. Ce mouvement d'oscillation à la fréquence de résonance σ_r est nommé mouvement "libre" puisqu'il n'est soumis à

TAB. 3.3 – Termes de $\Gamma_1'^{(2)}/A\Omega$ et $\Gamma_2'^{(2)}/A\Omega$ dont l'amplitude est supérieure à 10^{-9} radian par siècle. L'unité est 10^{-9} radian par siècle.

l	l'	F	D	Ω	$\Gamma_1'^{(2)}/A\Omega$		$\Gamma_2'^{(2)}/A\Omega$	
					sin	cos	sin	cos
0	0	2	0	2	-0.11	-18.98	0.00	0.00
0	0	0	0	1	-0.13	11.60	1.31	0.03
0	0	2	0	1	-0.10	-11.39	-1.42	0.04
0	0	2	-2	2	-0.08	-8.92	0.00	0.00
1	0	0	0	0	-0.08	-8.71	1.62	0.01
0	0	0	0	0	0.00	8.05	0.00	0.00
0	0	4	0	4	0.04	6.40	6.97	-0.04
0	0	0	2	0	-0.01	5.98	0.00	0.00
0	0	4	-2	4	0.04	5.91	6.44	-0.05
0	0	2	0	3	0.04	-3.80	-4.41	-0.04
0	0	4	0	3	0.02	3.69	4.29	-0.03
1	0	2	0	2	0.02	2.25	3.57	-0.03
1	0	-2	0	-2	0.03	2.19	-3.61	0.03
0	0	2	-2	1	-0.02	-1.85	0.00	0.00
0	0	0	2	-1	0.00	1.81	0.00	0.00
0	0	2	-2	3	0.01	-1.80	-2.09	-0.01
0	0	4	-2	3	0.01	1.69	1.96	-0.01
0	0	4	-4	4	0.01	1.38	1.50	-0.01
1	0	4	0	4	0.01	1.23	1.34	-0.01
1	0	-2	2	-2	0.02	1.04	-1.69	0.01
1	0	2	-2	2	0.00	0.00	1.69	-0.01
1	0	0	0	-1	0.00	0.00	1.12	0.00

aucun forçage externe. Une solution de l'équation avec le second membre est la solution du mouvement "libre" à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation complète en faisant "varier" la constante d'intégration :

$$m = K_r e^{i\sigma_r t} + K(t) e^{i\sigma_r t} \quad (3.86)$$

L'équation différentielle pour la fonction K :

$$\dot{K} e^{i\sigma_r t} = \frac{\Gamma}{A\Omega} = \frac{\Gamma'}{A\Omega} e^{-i\Phi} \quad (3.87)$$

ce qui donne, pour K :

$$K = \int \frac{\Gamma}{A\Omega} e^{-i\sigma_r t} dt = \int \frac{\Gamma'}{A\Omega} e^{-i\Phi} e^{-i\sigma_r t} dt \quad (3.88)$$

La solution pour m est alors :

$$m = K_r e^{i\sigma_r t} + e^{i\sigma_r t} \int \frac{\Gamma'}{A\Omega} e^{-i\Phi} e^{-i\sigma_r t} dt \quad (3.89)$$

On passe ensuite aux variations des angles d'Euler. Traitons séparément le cas du mouvement libre et celui du mouvement forcé. Si on se réduit au mouvement libre, on trouve que :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta &= -\Omega K_r e^{i(\sigma_r t + \Phi)} \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \theta &= \Omega(1 + m_3) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Compte tenu que $\sigma_r \ll \Omega$, on obtient pour les angles de nutation un mouvement d'oscillation quasi-diurne (dans le repère céleste) d'amplitude ΩK_r . Ce terme à longue période dans la Terre n'entre pas dans le cadre des nutations du CIP. Il s'agit en fait du terme de Chandler compté dans la Terre.

Dans le cas des mouvements forcés, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta &= -\Omega e^{i\sigma_r t} e^{i\Phi} \int \frac{\Gamma'}{A\Omega} e^{-i\Phi} e^{-i\sigma_r t} dt \\ \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \cos \theta &= \Omega(1 + m_3) \end{aligned} \quad (3.91)$$

C'est un système d'équations couplées qui doit être résolu par itérations successives jusqu'à ce que le degré de convergence voulu soit atteint.

Les équations (3.91) montrent que l'angle de rotation sidérale Φ est affecté par les variations zonales. Cet angle de rotation sidérale intervient à deux reprises dans la résolution de l'équation différentielle. Premièrement, il sert à transformer le moment des forces Γ' compté dans l'espace en moment des forces Γ compté dans la Terre. Deuxièmement, il permet, après intégration du moment des forces Γ' , de trouver les variations des angles d'Euler. Au moyen d'une évaluation numérique menée avec GREGOIRE (voir Annexe B), nous avons montré qu'en omettant les variations zonales de Φ dans la première équation de (3.91), on commet une erreur inférieure à $0.1 \mu\text{as}$ sur les angles θ et Ψ .

Dans le cas où le moment de force est réduit à un terme circulaire d'amplitude Γ'_0 , de fréquence dans l'espace $\sigma' \ll \Omega$, une forme approchée de l'équation (3.91) est alors :

$$\dot{\theta} + i\dot{\Psi} \sin \theta = \frac{i\Omega}{\sigma' - \Omega} \frac{\Gamma'_0}{A\Omega} A\Omega e^{i\sigma't} \quad (3.92)$$

La forme (3.92) permet d'obtenir l'ordre de grandeur des effets sur les angles d'Euler. On voit dans la table 3.3 que la composante $\Gamma_1^{(2)}/A\Omega$ possède un terme constant d'environ 8×10^{-9} rad/siècle. On déduit immédiatement que l'angle d'Euler Ψ subit une dérive de $-\Gamma_1^{(2)}/A\Omega \sin \epsilon_0$, soit environ $-4150 \mu\text{as/siècle}$. La composante $\Gamma_1^{(2)}/A\Omega$ contient un terme déphasé de période 18.6 ans et d'une amplitude de 11.6×10^{-9} rad/siècle et on trouvera donc sur Ψ une contribution en sinus dont l'amplitude est d'environ $178 \mu\text{as}$. Les autres perturbations tombent au dessous de $10 \mu\text{as}$.

Nous avons résolu les équations de Liouville simplifiées telles qu'elles sont présentées dans l'équation (3.81) par itérations successives jusqu'à ce que la convergence se stabilise au-dessous de $0.1 \mu\text{as}$. Les écarts aux angles d'Euler obtenues avec une Terre rigide sont reportées dans le tableau 3.4 pour des contributions supérieures à $1 \mu\text{as}$. La première ligne du tableau est obtenue en prenant l'équation de Liouville complète (3.81) alors que la seconde ligne ne prend pas en compte le couplage $m \times m_3$ du membre de gauche de l'équation (3.81) et permet d'apprécier l'effet de ce couplage. La comparaison montre que c'est surtout la variation d'ellipticité dynamique dans le couple qui donne un effet sur les nutations, les couplages $m \times m_3$ contribuant pour moins de $2 \mu\text{as}$ sur le terme en 18.6 ans de la nutation en longitude et moins d'une microseconde d'arc ailleurs. Ces valeurs rejoignent celles trouvées par Souchay et Folgueira (1999) par l'approche hamiltonienne avec toutefois un écart d'une dizaine de microsecondes d'arc sur l'amplitude du terme en 18.6 ans pour la nutation en longitude.

Solution relative à une Terre élastique

Ce calcul rejoint le calcul précédent mais utilise non plus les équations de la Terre rigide (3.36) mais les équations pour une Terre élastique (3.46) ce qui revient à appliquer aux amplitudes issue du modèle rigide la fonction de transfert (3.46). On s'attend ainsi à des amplitudes plus faibles d'un facteur 0.68. Les résultats sont dans la table 3.5.

TAB. 3.4 – Effets des marées zonales sur les angles de nutation (μas) calculés en résolvant l'équation de Liouville simplifiée (3.81). Le temps est en siècles juliens. La première ligne du tableau est obtenue en prenant l'équation de Liouville complète (3.81) alors que la seconde ligne ne prend pas en compte le couplage $m \times m_3$ du membre de gauche.

l	l'	F	D	Ω	$\Delta\psi$		$\Delta\epsilon$	
					sin	cos	sin	cos
0	0	0	0	1	179.27	2.05	0.17	-8.42
					177.64	2.04	0.16	-7.97
0	0	2	-2	2	3.65	-0.03	0.00	0.00
					3.67	-0.03	0.00	0.00
0	0	0	0	2	3.00	0.06	0.03	-1.94
					3.03	0.06	0.03	-1.92
l	l'	F	D	Ω	$t \times \sin$	$t \times \cos$	$t \times \sin$	$t \times \cos$
0	0	0	0	0	0.00	-4197.73	0.00	0.00
					0.00	-4159.91	0.00	0.00

TAB. 3.5 – Effets des marées zonales sur les angles de nutation (μas) calculés en résolvant l'équation pour une Terre élastique. Le temps est en siècles juliens.

l	l'	F	D	Ω	$\Delta\psi$		$\Delta\epsilon$	
					sin	cos	sin	cos
0	0	0	0	1	125.42	1.42	0.12	-7.72
0	0	2	-2	2	2.52	-0.02	0.00	0.00
0	0	0	0	2	2.04	0.04	0.02	-1.30
l	l'	F	D	Ω	$t \times \sin$	$t \times \cos$	$t \times \sin$	$t \times \cos$
0	0	0	0	0	0.00	-2823.61	0.00	0.00

TAB. 3.6 – Effets des marées zonales sur les angles de nutation (μas) calculés en résolvant l'équation pour une Terre élastique avec noyau liquide. Le temps est en siècles juliens.

					$\Delta\psi$		$\Delta\epsilon$	
l	l'	F	D	Ω	sin	cos	sin	cos
0	0	0	0	1	136.56	1.59	0.12	-6.18
0	0	2	-2	2	2.88	-0.03	0.00	0.00
0	0	0	0	2	2.33	0.04	0.02	-1.48
l	l'	F	D	Ω	$t \times \sin$	$t \times \cos$	$t \times \sin$	$t \times \cos$
0	0	0	0	0	0.00	-3222.80	0.00	0.00

Solution relative à une Terre élastique avec noyau liquide

Comme pour le cas de la Terre élastique, on applique aux amplitudes du modèle rigide la fonction de transfert (3.66), soit un facteur d'échelle de 0.77. Les résultats sont dans le tableau 3.6. Ces corrections, qui restent du même ordre de grandeur que celles calculées pour des modèles de Terre plus simples, sont à comparer à celles que Mathews (2002) présente comme provenant des termes non-linéaires des équations de la dynamique, termes ajoutés au LDE (Linear Dynamical Equation) pour prendre en compte les effets d'ordre supérieurs dûs aux variations de la vitesse de rotation. Mathews note ainsi une correction de 98 μas sur la nutation principale en longitude et de -29 μas sur cette même nutation en obliquité. Il trouve également une correction de -21 mas par siècle sur la précession qui diffère de notre calcul d'un ordre de grandeur puisque nous trouvons que la vitesse de précession en longitude doit être diminuée de 3.2 mas par siècle.

3.4 Discussion

La méthode utilisée par Bretagnon (2000) diffère sensiblement des autres. Partant d'un modèle de nutation pour la Terre rigide obtenu par résolution des équations différentielles au second ordre en Ψ , θ et Φ (modèle SMART97, Bretagnon et al. 1998), Bretagnon a appliqué la fonction de transfert MHB2000 calculée par Mathews, Herring et Buffet (2002) aux composantes équatoriales ω_1 et ω_2 du vecteur instantané de rotation dans le repère terrestre afin d'obtenir un modèle de nutation pour la Terre réelle. C'est la démarche habituelle pour la construction d'un modèle de nutation. Par exemple le modèle IAU2000A a été construit au moyen de la même fonction de transfert appliquée au modèle de nutation de Terre rigide de Souchay et Kinoshita (1997). Il est important de noter que dans ce nouveau modèle SMART97+MHB2000, les effets des variations zonales ne sont pas pris en compte (Mathews et al. 2002). Afin de tenir compte des variations de la vitesse de rotation de la Terre, Bretagnon a ajouté à la troisième composante du vecteur instantané de rotation, ω_3 , les variations zonales issues du modèle des IERS Conventions 1996 (McCarthy 1996). Il a ensuite recalculé les angles d'Euler par itérations successives. Cette démarche est incorrecte : les variations de m_3 auraient dû être prises en compte

dès le début de la résolution des équations de la dynamique, soit dès l'implémentation du modèle SMART97. Cette erreur produit un terme supplémentaire de 712 μas sur la nutation principale en obliquité provenant du couplage entre la précession lunisolaire et le terme de marée zonale en 18.6 ans. Nous allons décrire de manière simplifiée la démarche de Bretagnon. Considérons une version simplifiée pour l'évolution des angles d'Euler en ne donnant à Ψ qu'un mouvement séculaire et à θ une valeur constante :

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_0 \times t \\ \theta &= \theta_0\end{aligned}\tag{3.93}$$

on a :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \Psi_0 \\ \dot{\theta} &= 0\end{aligned}\tag{3.94}$$

et le vecteur de rotation s'écrit, selon les relations cinématiques d'Euler :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \Psi_0 \sin \theta_0 \sin \Phi \\ \omega_2 &= \Psi_0 \sin \theta_0 \cos \Phi\end{aligned}\tag{3.95}$$

où $\Phi = \Omega t$ pour suivre la démarche de Bretagnon. On ajoute maintenant les variations périodiques de la vitesse de rotation, en écrivant l'angle de rotation de la Terre Φ_z comme la somme de la rotation diurne et d'un terme périodique tel que $\dot{\Phi}_z = \Omega + \Omega a_z \cos \sigma'_z t$, soit :

$$\Phi_z = \Omega t + \frac{\Omega a_z}{\sigma'_z} \sin \sigma'_z t\tag{3.96}$$

En appliquant les relations cinématiques d'Euler avec le nouvel angle de rotation sidérale Φ_z , on a :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \omega_1 \sin \Phi_z + \omega_2 \cos \Phi_z \\ \dot{\theta} &= \omega_1 \sin \theta_0 \sin \Phi_z - \omega_2 \cos \theta_0 \cos \Phi_z\end{aligned}\tag{3.97}$$

Il vient alors, en considérant les expression (3.95) pour ω_1 et ω_2 :

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= \Psi_0 \cos(\Phi - \Phi_z) \\ \dot{\theta} &= \Psi_0 \sin \theta_0 \sin(\Phi - \Phi_z)\end{aligned}\tag{3.98}$$

Or $\Phi - \Phi_z = \frac{\Omega a_z}{\sigma'_z} \sin \sigma'_z t$ sachant que le rapport $\Omega a_z / \sigma'_z$ est proche de 10^{-11} rad×siècle. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \cos(\Phi - \Phi_z) &\sim 1 \\ \sin(\Phi - \Phi_z) &\sim \frac{\Omega a_z}{\sigma'_z} \sin \sigma'_z t \end{aligned} \quad (3.99)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \Psi_0 \\ \dot{\theta} &= \Psi_0 \sin \theta_0 \frac{\Omega a_z}{\sigma'_z} \sin \sigma'_z t \end{aligned} \quad (3.100)$$

On voit donc apparaître un terme à la fréquence σ'_z dans l'obliquité θ . La valeur de Ψ_0 est de 0.02442 rad/siècle et $\sin \theta_0 = 0.4$. On a de plus, pour le terme en 18.6 ans des marées zonales, $a_z = 1.8 \times 10^{-9}$ rad et $\sigma'_z = 33.7$ rad/siècle, soit $\Omega a_z = 1.3 \times 10^{-13}$ rad/s. Il vient que $\dot{\theta} = -1.2 \times 10^{-7} \sin \sigma'_z t$, et que $\theta = 3.6 \times 10^{-9} \cos \sigma'_z t$ soit une amplitude voisine de 743 μ as pour le terme en 18.6 ans de θ . Il s'agit du terme trouvé par Bretagnon (2000), dont la valeur est légèrement différente compte tenu d'un calcul plus précis (712 μ as). On voit grâce à l'équation (3.98) que si l'on avait inclus dès le départ du calcul les variations zonales, c'est à dire si l'on avait considéré Φ_z et non Φ , ce terme supplémentaire sur θ ne serait pas apparu.

Il est important de remarquer que cette amplitude de 712 μ as ne comprend pas les effets des variations de l'ellipticité dynamique puisque ceux-ci interviennent dans le moment de force et qu'ils n'ont pas été considérés lors de la résolution des équations de SMART97.

3.5 Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons complété les équations de la rotation terrestre pour faire apparaître, dans les termes du second ordre, les divers couplages entre la vitesse de rotation (elle-même reliée aux variations d'ellipticité dynamique) et les composantes équatoriales du vecteur instantané de rotation. La résolution de ces équations pour des modèles de Terre plus ou moins raffinés nous a permis d'évaluer les effets des marées zonales sur la précession-nutation, tout en contrôlant nos résultats par l'approche hamiltonienne. Nous trouvons que la contribution principale est supérieure à 100 μ as sur le terme en 18.6 ans (en longitude) et d'environ -3 mas par siècle sur la précession en longitude. Dans la table 3.7 nous dressons un bilan comparatif des principaux effets sur la précession-nutation, en synthétisant à la fois nos propres résultats obtenus pour trois modèles de Terre et par deux approches différentes, et ceux rapportés par d'autres auteurs. Nos valeurs sont comparables à celles de Souchay et Folgueira (1999) qui utilisent une approche hamiltonienne et un modèle de Terre simplifié. Si les ordres de grandeurs trouvés par Mathews et al. (2002), pour un modèle de Terre réelle, sont en accord avec les nôtres, l'effet sur la précession diffère d'un ordre de grandeur.

TAB. 3.7 – Effets des marées zonales sur les angles de nutation (μas). MHB2000 : Mathews et al. (2002) ; SF99 : Souchay et Folgueira (1999) ; L03+M78 : cette étude par approche hamiltonienne avec $\delta C/C$ issu de la formulation (3.80) ; L03+DS99 : idem avec le modèle de variations zonales de Defraigne et Smits (1999) ; L03+TR : cette étude en résolvant les équations de Liouville simplifiées ; L03+ME : idem avec manteau élastique ; L03+NF : idem avec manteau élastique et noyau fluide.

l	l'	F	D	Ω		$\Delta\psi$		$\Delta\epsilon$	
						sin	cos	sin	cos
0	0	0	0	1					
					MHB2000	93.8	-	-	-29.0
					SF99	168.0	-	-	-9.0
					L03+M78	168.0	-	-	-8.5
					L03+DS99	181.0	2.1	0.2	-8.9
					L03+TR	179.3	2.1	0.2	-8.4
					L03+ME	125.4	1.4	0.1	-7.7
					L03+NF	136.6	1.6	0.1	-6.2
0	0	2	-2	2					
					MHB2000	-	-	-	-
					SF99	3.2	-	-	0.6
					L03+M78	3.2	-	-	0.0
					L03+DS99	3.4	0.0	0.0	0.0
					L03+TR	3.7	0.0	0.0	0.0
					L03+ME	2.5	0.0	0.0	0.0
					L03+NF	2.9	0.0	0.0	0.0
0	0	0	0	2					
					MHB2000	5.0	-	-	-2.4
					SF99	4.5	-	-	-2.8
					L03+M78	4.0	-	-	-2.6
					L03+DS99	4.3	0.0	0.0	-2.8
					L03+TR	3.0	0.1	0.0	-1.9
					L03+ME	2.0	0.0	0.0	-1.3
					L03+NF	2.3	0.0	0.0	-1.5
l	l'	F	D	Ω		$t \times \cos$			
0	0	0	0	0					
					MHB2000	-21×10^3			
					SF99	-			
					L03+M78	-4064.3			
					L03+DS99	-4278.5			
					L03+TR	-4197.7			
					L03+ME	-2823.6			
					L03+NF	-3222.8			

Conclusion et perspectives

Travail réalisé

La transformation entre repère terrestre (TRF) et repère céleste (CRF)

Dans le premier Chapitre de cette thèse, nous avons détaillé la transformation entre TRF et CRF dans le cadre de la nouvelle représentation utilisant l'Origine Non-Tournante comme point origine sur l'équateur vrai. A partir du nouveau modèle de précession-nutation IAU2000A, nous avons calculé les développements en fonction du temps des coordonnées X et Y du pôle céleste dans l'espace. L'utilisation de l'Origine Non-Tournante nécessite également la modélisation de deux quantités, s et s' , fonctions des EOP et servant à positionner cette origine sur l'équateur du CIP. La quantité s est fonction des coordonnées du CIP dans l'espace et a été modélisée à partir des développements de X et Y . La quantité s' est fonction des coordonnées du CIP dans la Terre et a été déterminée empiriquement à partir des récentes séries temporelles de mouvement du pôle.

Dans le cadre du modèle IAU2000A, les quantités X , Y et s , sont cohérentes avec les paramètres classiques de la nutation ($\Delta\psi$ et $\Delta\epsilon$) avec une précision de $0.5 \mu\text{as}$. Nous assurons la microseconde d'arc sur la valeur de s' . Celle-ci ne devrait pas varier de plus de quelques microsecondes d'arc dans les dix années à venir. Toutefois, si de fortes variations de l'amplitude du terme de Chandler et du terme annuel venaient à se produire, la quantité s' devra être réestimée.

L'implémentation du nouveau modèle de précession-nutation IAU2000A donne, pour les coordonnées célestes du CIP, des écarts au modèle δX , δY , de l'ordre de $200 \mu\text{as}$. Le terme principal contenu dans ces résidus est la signature de la nutation libre du noyau liquide (FCN), mouvement libre d'une période de 432 jours et dont l'amplitude varie autour d'une centaine de microsecondes d'arc. La variabilité temporelle de cette amplitude empêche une modélisation à priori de la FCN et ne permet qu'une modélisation empirique à posteriori ajustée sur les observations.

Le rôle de l'atmosphère et des océans

En plus de l'action des corps célestes, il faut aussi prendre en considération les couches fluides externes : l'atmosphère et les océans qui agissent sur les 5 paramètres d'orientation et tenter d'en cerner l'imprédictibilité. L'excitation de ces couches fluides se décompose en termes périodiques mais dont les amplitudes et les phases varient au cours du temps

de manière à priori aléatoire. Cette caractéristique élimine la possibilité de produire un modèle stable pour les effets atmosphériques et océaniques sur la rotation terrestre. Toutefois, on peut évaluer ces effets en moyenne sur des périodes de temps données et étudier la variabilité des amplitudes sur ces mêmes périodes.

C'est l'action combinée de l'atmosphère et de l'océan qui induit le mouvement du CIP dans la Terre et les variations de la longueur du jour. La variabilité de l'excitation géophysique et la difficulté à estimer la puissance excitatrice à la fréquence de résonance de Chandler font que le mouvement du pôle reste non-modélisable. Seule sa partie diurne, induite par les marées océaniques, est modélisée. Cependant, pour la partie longue-période du mouvement du pôle et de l'excès de la longueur du jour, nous avons évalué les effets moyens des principaux termes excitateurs (annuels, semi-annuels, ter-annuels) ainsi que la variabilité temporelle de ces effets sur 20 années. Cette variabilité est de l'ordre de 15% pour le terme annuel, et croît rapidement jusqu'à 50% pour les termes semi-annuels et ter-annuels. Nous montrons que la variabilité dans le mouvement du pôle observé et la longueur du jour est très fortement corrélée avec la variabilité de l'excitation géophysique et nous en déduisons qu'elle est bien due à des processus dans les couches fluides externes. Cette étude fournit ainsi un ordre de grandeur de l'incertitude sur l'amplitude et la phase de ces termes saisonniers.

Les nutations sont excitées par la partie diurne du moment cinétique atmosphérique. Nous avons trouvé des effets quelques dizaines de microsecondes de degré sur les termes annuels et saisonniers. Ces effets sont donc noyés dans les résidus des observations. Nous montrons également que leur variabilité temporelle est de l'ordre de leur amplitude. Il faut ajouter à cela que la bande diurne du moment cinétique est encore actuellement délicate à estimer (entre autres raisons, l'échantillonnage est faible), ce qui accroît la difficulté pour une estimation robuste des effets atmosphériques sur les nutations.

L'atmosphère est aussi soumise à l'action des marées lunisolaires. Il en résulte un moment de force de l'ordre de 10^{17} N.m qui participe à la précession de la Terre à hauteur de -3 mas par siècle et à la nutation en 18.6 ans.

Les couplages entre la vitesse de rotation de la Terre et la précession-nutation

Les équations de la dynamique de la rotation terrestre, telles qu'elles sont écrites pour l'établissement d'un modèle de précession-nutation, ne tiennent par compte habituellement du couplage entre les marées zonales et la composante équatoriale du vecteur de rotation. Plusieurs approches sont possibles pour évaluer cet effet sur la précession-nutation. Nous avons implémenté une méthode hamiltonienne et une méthode basée sur la résolution des équations de Liouville pour un modèle de Terre avec manteau élastique et noyau fluide. Dans cette seconde approche, nous avons complété les équations de Liouville linéarisées par les termes d'ordre supérieur faisant apparaître les couplages et nous avons évalué l'effet de chaque couplage. Nous avons proposé un modèle de corrections à appliquer aux amplitudes des nutations pour tenir compte de ces effets. La correction majeure est celle du terme en 18.6 ans et s'élève à 136 μ as. La précession doit aussi être corrigée d'environ -3 mas par siècle.

Perspectives et applications

Ce travail permet d'envisager les développements suivants :

- Les écarts au modèle δX et δY ne montrent pas seulement du bruit mais des termes périodiques comme la FCN qui ne peuvent être modélisés que de façon empirique. Une réanalyse des observations VLBI incluant un modèle empirique de FCN dans la matrice de transformation permettrait de réduire significativement les écarts au pôle céleste, et de pousser l'exploration de la nutation jusque dans ses derniers retranchements.

- La compréhension du mouvement du pôle et de la longueur du jour (et dans une moindre mesure, d'une petite partie de la nutation) passe inévitablement par une bonne modélisation des interactions entre la Terre, son atmosphère et ses océans. Si la production routinière de moment cinétique atmosphérique semble en place dans le cadre de l'IERS (série du NCEP/NCAR Reanalysis), l'océan est encore délaissé. Nous avons montré son influence importante. La mise en place d'une production routinière de moment cinétique océanique (dont le modèle serait forcé par les données NCEP/NCAR Reanalysis) dans la lignée des séries calculées par Ponte en 1998 et par Gross en 2003, serait un point clef pour progresser dans les études du mouvement du pôle qui reste la principale composante non-prédictible de l'orientation terrestre. Les effets des nappes d'eau souterraines sont également à étudier.

- Les corrections dûes aux marées zonales sur les nutations sont à la limite de la précision des observations et doivent donc être introduites dans les logiciels d'analyse de données pour la détermination des EOP.

- Il existe des variations de l'ellipticité dynamique de la Terre autres que celles des marées zonales. Il s'agit principalement des effets produits par des redistributions de masse au sein de l'atmosphère et des océans et des nappes d'eau souterraines, et qui sont déterminées globalement par les techniques satellitaires sous la forme de variations du coefficients C_{20} du champ de gravité terrestre. Dans l'avenir, il faudra calculer l'influence de ces variations non-zonales sur la précession-nutation.

Annexe A

Les arguments de la nutation

A.1 Les arguments de Delaunay

Les solutions pour les mouvements de la Lune, du Soleil et des planètes sont exprimées par des séries de Fourier dont les fréquences sont des combinaisons entières d'arguments fondamentaux. Ces arguments ont des expressions polynomiales. Les cinq arguments de Delaunay caractérisent les positions de la Lune et du Soleil sur la voûte céleste. Ils sont :

l , anomalie moyenne de la Lune,

l' , anomalie moyenne du Soleil,

F , angle entre le noeud ascendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique et la Lune,

D , élongation moyenne de la Lune par rapport au Soleil,

Ω , longitude moyenne du noeud ascendant de la Lune sur l'écliptique, $\Omega = L - F$, mesuré à partir de l'équinoxe de la date.

La figure A.1 montre chacun de ces angles.

Les valeurs recommandées par l'UAI sont (pour un temps t en siècles juliens rapportés à J2000.0) sont celles de Simon et al. (1994, tables 3.4 (b.3) et 3.5 (b)) :

$$\begin{aligned} l &= 134^\circ 96340251 + 171791592'' 2178 \times t \\ &+ 31.8792'' \times t^2 + 0'' 051635 \times t^3 - 0'' 00024470 \times t^4 \\ l' &= 357^\circ 52910918 + 129596581'' 0481 \times t \\ &- 0.5532'' \times t^2 + 0'' 000136 \times t^3 - 0'' 00001149 \times t^4 \\ F &= 93^\circ 27209062 + 1739527262'' 8478 \times t \\ &- 12.7512'' \times t^2 - 0'' 001037 \times t^3 + 0'' 00000417 \times t^4 \\ D &= 297^\circ 85019547 + 1602961601'' 2090 \times t \\ &- 6.3706'' \times t^2 + 0'' 006593 \times t^3 - 0'' 00003169 \times t^4 \\ \Omega &= 125^\circ 04455501 - 6962890'' 5431 \times t \end{aligned} \tag{A.1}$$

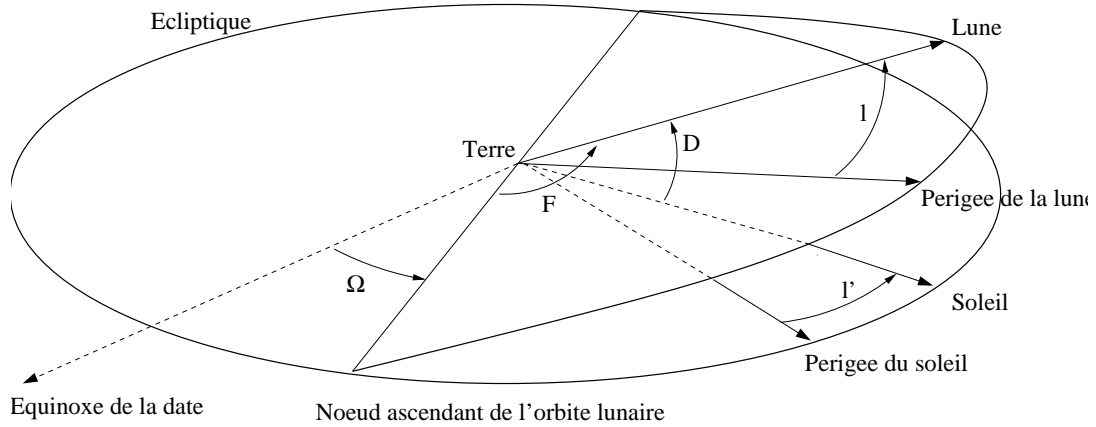


FIG. A.1 – Les angles de Delaunay.

$$+ 7.4722'' \times t^2 + 0''007702 \times t^3 - 0''00005939 \times t^4$$

A.2 Les arguments planétaires

Les positions des planètes sont précisées au moyen des arguments dits "planétaires" et qui sont les longitudes moyennes des planètes. On les notera l_{Me} , l_{Ve} , l_E , l_{Ma} , l_{Ju} , l_{Sa} , l_{Ur} et l_{Ne} respectivement pour Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune. Pluton est ignorée compte tenu de son influence négligeable sur le calcul de la précession-nutation.

Les valeurs recommandées par l'UAI sont exprimées en radians (pour un temps t en siècles juliens rapportés à J2000.0) (Souchay 1999, Simon et al. 1994) :

$$\begin{aligned}
 l_{Me} &= 4.402608842 + 2608.7903141574 \times t \\
 l_{Ve} &= 3.176146697 + 1021.3285546211 \times t \\
 l_E &= 1.753470314 + 628.3075849991 \times t \\
 l_{Ma} &= 6.203480913 + 334.0612426700 \times t \\
 l_{Ju} &= 0.599546497 + 52.9690962641 \times t \\
 l_{Sa} &= 0.874016757 + 21.3299104960 \times t
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
l_{Ur} &= 5.481293872 + 7.4781598567 \times t \\
l_{Ne} &= 5.311886287 + 3.8133035638 \times t
\end{aligned}$$

A.3 Le cumul de précession

Le cumul de précession, noté p_A , entre J2000.0 et la date, indique le déplacement de l'équinoxe vrai le long de l'écliptique de la date. Cette quantité est utile pour rapporter les angles à l'équinoxe de la date. Sa valeur est (en radians) :

$$p_A = 0.024381750 \times t + 0.00000538691 \times t^2 \quad (\text{A.3})$$

Le temps utilisé est normalement le Temps Dynamique Barycentrique (TDB). Toutefois, l'utilisation du Temps Terrestre (TT) à la place du TDB produit une erreur inférieure à la microseconde d'arc sur un siècle. Dans les expressions précédentes, t est exprimé en siècles juliens par rapport à J2000.0.

A.4 Les variables de Doodson

Les développements analytiques du potentiel de marée sont généralement donnés dans les variables de Doodson.

τ est le temps lunaire moyen $\tau = 15^\circ T + GMST_{12h} - s + \lambda$, où $GMST_{12h}$ est le temps sidéral moyen de Greenwich à 12 h UT, T le temps universel compté en heures et λ la longitude du lieu d'observation.

$$s = F + \Omega, \text{ longitude moyenne de la Lune,}$$

$$h = F + \Omega - D, \text{ longitude moyenne du Soleil,}$$

$$p = F + \Omega - l, \text{ longitude moyenne du périgée de la Lune,}$$

$$N' = -\Omega$$

$$p_s = F + \Omega - D - l', \text{ longitude moyenne du périgée du Soleil.}$$

Les valeurs numériques sont :

$$\begin{aligned}
s &= 785\,939''924 + 1\,732\,564\,372.3047 \times t - 5.2790 \times t^2 \\
&+ 0.006665 \times t^3 - 0.00005522 \times t^4 \\
h &= 1\,009\,679''221 + 129\,602\,771.0957 \times t + 1.0916 \times t^2 \\
&+ 0.000072 \times t^3 - 0.00002353 \times t^4 \\
p &= 300\,071''675 + 14\,648\,449.0869 \times t - 37.1582 \times t^2
\end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
& - 0.044970 \times t^3 + 0.00018948 \times t^4 \\
N' = & \quad 845\,839''602 + 6\,962\,890.5431 \times t - 7.4722 \times t^2 \\
& - 0.007702 \times t^3 + 0.00005939 \times t^4 \\
p_s = & \quad 1\,018\,574''428 + 6\,190.048 \times t + 1.6448 \times t^2 \\
& - 0.000064 \times t^3 - 0.00001204 \times t^4
\end{aligned}$$

Annexe B

Le logiciel GREGOIRE

GREGOIRE, dont le nom rappelle celui de l'abbé Grégoire (1750-1831), l'un des fondateurs du Bureau des Longitudes, est un logiciel pour la manipulation de séries de Poisson à coefficients numériques écrit par Jean Chapront (SYRTE, Observatoire de Paris). Il permet l'addition, la multiplication, la dérivation, l'intégration, etc... de séries dont le nombre total de coefficients peut atteindre 100000 et possédant un maximum de 16 arguments dont les fréquences sont définies dans un fichier externe. Sous une forme plus primitive, il fut utilisé intensivement au service de calcul du Bureau des Longitudes (Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides, IMCCE) lors de l'élaboration des théories lunaires et planétaires.

Une des particularités qui rend attrayante l'utilisation de GREGOIRE est qu'il est doté d'un interpréteur de commandes. L'utilisateur pilote ainsi le logiciel à partir d'un script écrit dans un langage spécifique. Des commandes prédéfinies permettent d'effectuer les opérations les plus courantes, mais l'utilisateur peut aussi programmer ses propres sousroutines.

A titre d'exemple, voici le script très succinct qui a permis de calculer analytiquement l'effet des termes diurnes (modèle de Ray) dans le mouvement du pôle sur la quantité s' :

```
{-----}
{
{   EFFET DES TERMES DIURNES SUR S'   }
{                                     }
{   AUTEUR ..... S. LAMBERT          }
{   DATE ..... 01 AVRIL 2002         }
{                                     }
{-----}
```

```
#PREC=1.D-16      {Niveau de troncature des series}
#PRECI=1.D-16     {Precision de l'impression}
#MAXIMPR=10       {Nombre de termes a imprimer}
#NEWARGU=1        {Commande precisant que le premier argument}
                  {doit etre positif}
```

```

{Diverses constantes utiles...}

r2a=2.06264806247096355D+5
a2r=4.84813681109535993D-6

{Lecture des series a partir de fichiers externes : commande %s}

DX=%s dx.dat {mas}
DY=%s dy.dat {mas}

{Conversion en radians}

DU=1.D-3*DX
DV=-1.D-3*DY
DU=DU*a2r
DV=DV*a2r

{Derivation avec la commande %d}

DDU=%d DU
DDV=%d DV

{Combinaison pour calculer s'}

I=DU*DDV-DDU*DVB
I=-0.5D0*I

I=I*r2a {Conversion en secondes d'arc}
I=I*1.D6 {Conversion en microas}

{Impression avec la commande %i : affiche toute la s\'erie}

%i I

{Integration avec la commande %p}

S=%p I

{Impression avec la commande %j : affiche les 20 premiers termes}

%j S

{Fin du programme avec la commande %e}

%e

```

Quant aux fichiers donnant les développements en séries de Fourier des termes diurnes et sub-diurnes dans le mouvement du pôle, ils doivent être formatés de manière à pouvoir être lus par GREGOIRE. Ci-après, un exemple de fichier de données (pour des raisons d'affichages, les 10 dernières colonnes d'arguments, qui dans ce cas sont tous nuls, ont été remplacées par les points de suspension) :

Fichier dx.dat :

```

      8      0
1-0.0260000000000D+00 0.0060000000000D+00 -1 0 -2 0 -2 1 ...
2-0.1330000000000D+00 0.0490000000000D+00 0 0 -2 0 -2 1 ...
3-0.0500000000000D+00 0.0250000000000D+00 0 0 -2 2 -2 1 ...
4-0.1520000000000D+00 0.0780000000000D+00 0 0 0 0 0 1 ...
5-0.0570000000000D+00-0.0130000000000D+00 -1 0 -2 0 -2 2 ...
6-0.3300000000000D+00-0.0280000000000D+00 0 0 -2 0 -2 2 ...
7-0.1450000000000D+00 0.0640000000000D+00 0 0 -2 2 -2 2 ...
8-0.0360000000000D+00 0.0170000000000D+00 0 0 0 0 0 2 ...

```

Fichier dy.dat :

```

      8      0
1-0.0060000000000D+00-0.0260000000000D+00 -1 0 -2 0 -2 1 ...
2-0.0490000000000D+00-0.1330000000000D+00 0 0 -2 0 -2 1 ...
3-0.0250000000000D+00-0.0500000000000D+00 0 0 -2 2 -2 1 ...
4-0.0780000000000D+00-0.1520000000000D+00 0 0 0 0 0 1 ...
5 0.0110000000000D+00+0.0330000000000D+00 -1 0 -2 0 -2 2 ...
6 0.0370000000000D+00+0.1960000000000D+00 0 0 -2 0 -2 2 ...
7 0.0590000000000D+00+0.0870000000000D+00 0 0 -2 2 -2 2 ...
8 0.0180000000000D+00+0.0220000000000D+00 0 0 0 0 0 2 ...

```

L'exécution du moniteur donne un affichage sous un format similaire :

```

LES DIMENSIONS MAXIMALES DES TABLEAUX SONT:
X --> 128 $ --> 32768 T --> 16384
LA TRONCATURE DES SERIES PAR DEFAULT EST (PREC): 0.10E-07
LA TRONCATURE DES PRODUITS PAR DEFAULT EST (PRECR): 0.10E-08
Nombre de tableaux T (memoire NBT) --> 32 total
(memoire+tampon MXSER) --> 128
LA TRONCATURE DES SERIES EST: 0.10E-15

```

```

Serie:  I
              sin              cos
T**  0 Nombre de termes:  31

```

1	-0.552836096695D-03	0.122194551417D-02	0	0	2	0	2	-3	...
2	0.000000000000D+00	-0.116431394105D-02	0	0	0	0	0	0	...
3	-0.495115292161D-03	0.442976550104D-03	0	0	0	0	0	1	...
4	0.161495448948D-04	0.563477354513D-03	0	0	2	0	2	0	...
5	0.396802989704D-03	-0.137482967128D-03	0	0	4	-2	4	-3	...
6	-0.241421586199D-03	-0.289231832385D-03	0	0	0	2	0	0	...
7	0.384265214621D-04	-0.478105884979D-03	1	0	0	0	0	0	...
8	-0.141016214325D-03	0.334006090501D-03	1	0	2	0	2	-3	...
9	0.221123516736D-03	0.166375543923D-03	0	0	2	0	2	-1	...
10	0.852807670433D-04	-0.219808797692D-03	0	0	4	0	4	-3	...
11	0.180537165050D-03	0.833248454079D-04	1	0	0	0	0	-1	...
12	-0.103081430777D-03	0.127880491911D-03	1	0	0	0	0	1	...
13	0.275602227213D-04	0.170678008173D-03	1	0	2	0	2	0	...
14	-0.789112712589D-04	-0.112747466556D-03	1	0	0	2	0	0	...
15	0.115756050923D-03	0.372432511666D-04	1	0	2	0	2	-1	...
16	0.818318152121D-04	0.629237063942D-04	0	0	0	2	0	-1	...
17	0.919080375840D-04	-0.526523262185D-04	1	0	4	-2	4	-3	...
18	0.752877920024D-04	-0.515558492119D-04	0	0	2	-2	2	-3	...
19	-0.269921002601D-04	0.986817298899D-04	0	0	0	2	0	1	...
20	0.162107064410D-04	-0.969174178322D-04	1	0	4	0	4	-3	...
21	-0.299716389140D-04	-0.733047045278D-04	0	0	2	-2	2	-1	...
22	-0.164835560784D-04	-0.811932876549D-04	0	0	4	-2	4	-4	...
23	-0.426761877954D-04	-0.475947992702D-04	1	0	4	-2	4	-4	...
24	0.377852199091D-04	-0.269555648305D-04	0	0	4	-4	4	-3	...
25	0.404881537528D-04	0.134960512509D-04	1	0	0	2	0	-1	...
26	-0.311261677644D-04	-0.192435856374D-04	0	0	0	0	0	3	...
27	0.134385698536D-04	-0.272232846884D-04	0	0	2	0	2	-4	...
28	-0.490356528784D-05	0.345948780399D-04	1	0	0	2	0	1	...
29	-0.317477021491D-04	-0.459306978628D-05	1	0	4	0	4	-4	...
30	-0.890714933145D-05	0.197175356995D-04	0	0	2	0	2	1	...
31	-0.660897985111D-05	-0.148321345046D-04	1	0	2	0	2	-4	...

T** 1 Nombre de termes: 0

T** 2 Nombre de termes: 0

T** 3 Nombre de termes: 0

T** 4 Nombre de termes: 0

T** 5 Nombre de termes: 0

Serie: S

		sin	cos						
T**	0	Nombre de termes:	30						
1	0.169801515937D-06	0.189787308498D-06	0	0	0	0	0	1	...
2	0.136179547005D-06	0.616107415126D-07	0	0	2	0	2	-3	...
3	0.542143883056D-07	-0.221662999764D-07	0	0	2	-2	2	-1	...
4	-0.574046822732D-07	-0.461375256967D-08	1	0	0	0	0	0	...
5	-0.134395746076D-07	-0.387892660164D-07	0	0	4	-2	4	-3	...
6	0.145675325149D-07	-0.315629871155D-07	1	0	0	0	0	-1	...
7	0.335414802448D-07	-0.961315724074D-09	0	0	2	0	2	0	...

```

      8 -0.186087888286D-07  0.155327416046D-07  0  0  0  2  0  0  ...
      9  0.193047702406D-07  0.815040711879D-08  1  0  2  0  2 -3  ...
     10  0.117243257289D-07 -0.155823631011D-07  0  0  2  0  2 -1  ...
T**  1 Nombre de termes:      1
     11  0.000000000000D+00 -0.116431394105D-02  0  0  0  0  0  0  ...
T**  2 Nombre de termes:      0
T**  3 Nombre de termes:      0
T**  4 Nombre de termes:      0
T**  5 Nombre de termes:      0
FIN DES OPERATIONS

```


Annexe C

Quelques notions d'analyse du signal

C.1 Notions de base sur les séries temporelles

L'analyse des observations demande la manipulation de séries temporelles, c'est à dire de suites d'échantillons plus ou moins rapprochés et s'étalant sur une durée limitée dans le temps. La question est de savoir quelles sont les informations pertinentes qu'on peut extraire de ces séries. Par exemple, soit une série temporelle d'une certaine quantité, on veut savoir quelles sont les périodicités présentes dans l'évolution de cette quantité.

C.1.1 Condition sur les périodes observables

Deux paramètres fondamentaux d'une série temporelle sont sa période d'échantillonnage T_e et sa longueur dans le temps ΔT . Supposons que la série est régulièrement échantillonnée et possède N échantillons, sa longueur est donc $\Delta T = (N - 1)T_e$. De ces deux paramètres, on tire deux conditions sur les périodes observables dans le signal. Premièrement, plus on observe longtemps, plus on pourra détecter des longues périodes. Ainsi, on ne pourra observer de périodes supérieures à la longueur de la série, soit :

$$T_{max} = \Delta T \tag{C.1}$$

ce qui donne la fréquence minimale, ou fréquence fondamentale ν_f , observable :

$$\nu_{min} = \nu_f = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{(N - 1)T_e} \tag{C.2}$$

Deuxièmement, plus les observations sont rapprochées, plus on pourra détecter des périodes courtes. On considère qu'un signal périodique est correctement échantillonné s'il possède au moins deux échantillons par période (condition de Nyquist ou de Shannon). Ceci amène à la période minimale enregistrable :

$$T_{min} = 2T_e \tag{C.3}$$

ce qui donne, dans le domaine des fréquences, la fréquence de coupure ν_c du signal :

$$\nu_{max} = \nu_c = \frac{1}{2T_e} \quad (C.4)$$

C.1.2 Résolution spectrale et période de modulation

La résolution spectrale est le pouvoir de séparer deux fréquences très rapprochées. Le plus petit intervalle de fréquence détectable est théoriquement égal à la fréquence fondamentale ν_f donnée par la formule (C.2), elle-même inversement proportionnelle à la longueur de la série. La résolution spectrale est donc d'autant meilleure que la série est longue. La figure C.1 illustre comment on sépare deux fréquences très rapprochées en augmentant la longueur de la série.

Un tel problème est présent dans le mouvement du pôle observé. En effet, celui-ci contient deux oscillations progrades, l'une annuelle de période 365.25 jours (soit de fréquence $\nu_1 = 0.0027$ cycle par jour) et l'autre à la période de 433 jours (terme de Chandler, de fréquence $\nu_2 = 0.0023$ cycle par jour). La séparation de ces deux fréquences n'est possible que si la fréquence fondamentale ν_f associée à l'échantillonnage est plus petite que la différence $\nu_1 - \nu_2$. En vertu de la relation (C.2), le temps d'observation ΔT doit répondre à l'inégalité :

$$\Delta T > \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|} \quad (C.5)$$

soit environ 2500 jours.

Cette période d'observation "minimale" de presque 7 ans correspond à la période de modulation visible par exemple sur les figures 1.20. Deux ondes de fréquences ν_1 et ν_2 superposées donnent ainsi un battement (ou modulation) du signal dont la période est :

$$T_{\text{mod}} = \frac{1}{|\nu_1 - \nu_2|} \quad (C.6)$$

C.2 Méthodes d'analyse spectrale

L'analyse spectrale classique consiste à regarder l'amplitude du signal en fonction de sa fréquence ou de sa période. Le spectre classique (par exemple le spectre de Fourier) n'est fonction que d'une seule variable : la fréquence σ . En analyse temps-fréquence, le spectre doit posséder deux variables : la fréquence σ et le temps t . On regarde ainsi comment les amplitudes des diverses composantes périodiques varient au cours du temps. Plusieurs méthodes existent pour effectuer ces décompositions, dont nous allons ici donner un bref aperçu fort peu exhaustif et sans entrer dans le détail des calculs.

C.2.1 La transformée de Fourier

La transformée de Fourier décompose le signal sur une base de fonctions orthogonales périodiques, les exponentielles complexes de fréquences fixées. Ainsi, un signal temporel $f(t)$ s'écrit comme une somme (continue) d'exponentielles complexes affectées chacune d'un coefficient $\hat{f}(\nu)$:

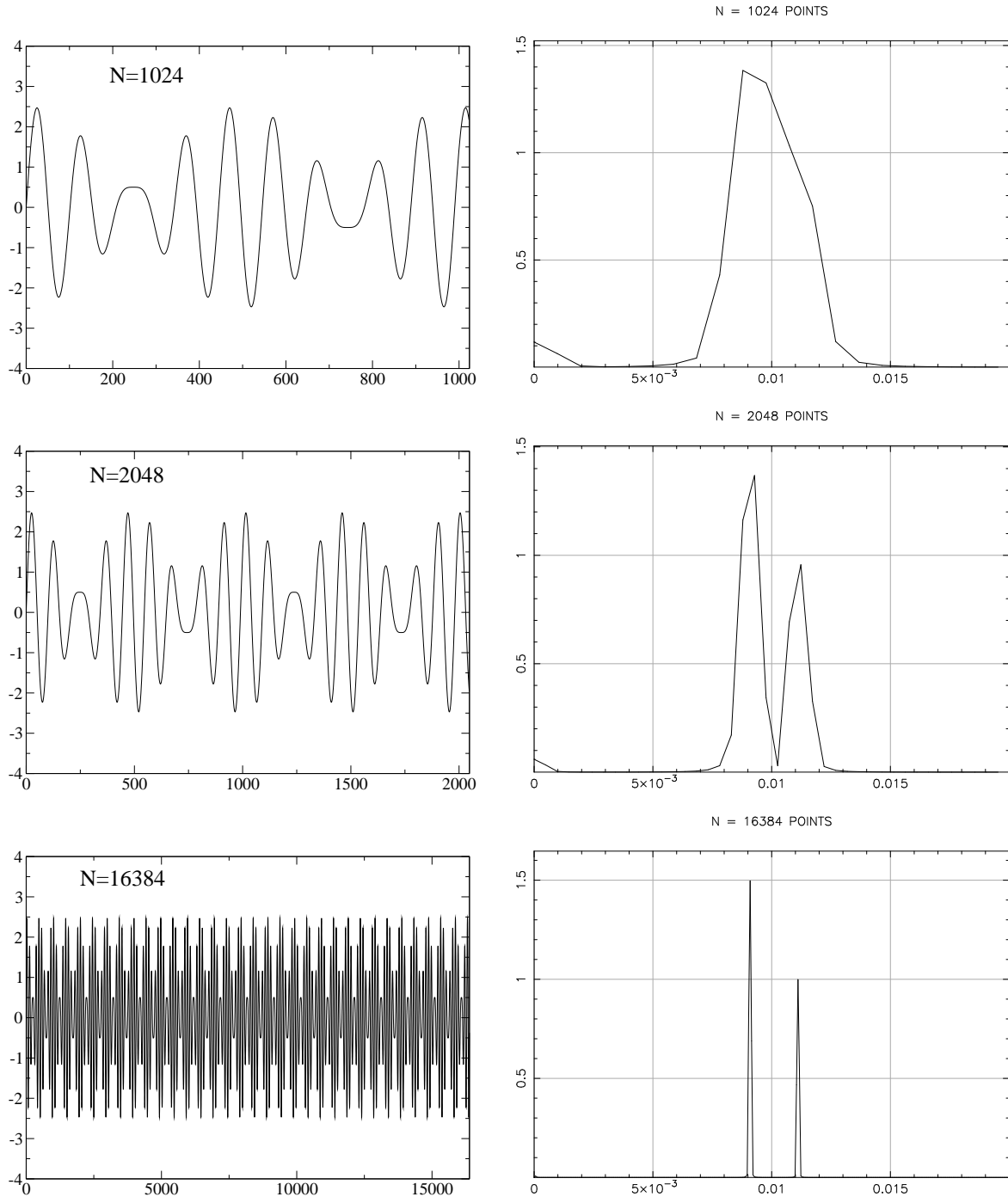


FIG. C.1 – Amélioration de la résolution spectrale avec l'augmentation du temps d'observation. Les deux fréquences à séparer sont 0.011 et 0.009 avec des amplitudes respectives de 1 et 1.5.

$$f(t) = \int \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \quad (\text{C.7})$$

La fonction $\hat{f}(\nu)$, de la variable ν continue dans l'espace des fréquences, est alors nommée "spectre" de $f(t)$.

Cette relation (C.7) est appelée "transformation de Fourier inverse" puisqu'elle re-compose le signal à partir du spectre. La transformation dite "transformation de Fourier directe" donne les valeurs des coefficients $\hat{f}(\nu)$ et s'écrit¹ :

$$\hat{f}(\nu) = \int f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \quad (\text{C.8})$$

Les fonctions de la base sont des fonctions très localisées dans l'espace des fréquences, mais totalement délocalisées dans le domaine du temps². Cette propriété des fonctions de la base fait que la transformée de Fourier donne une excellente résolution spectrale, mais une résolution temporelle nulle : on peut séparer des fréquences très rapprochées sans pouvoir déterminer si leurs amplitudes varient dans le temps. De ce fait, le spectre de Fourier est un spectre "moyenné" sur l'intervalle d'observation.

Numériquement, l'implémentation de la transformée de Fourier d'une série temporelle discrète au moyen de la formule (C.8) est extrêmement coûteux en temps de calcul. On peut montrer que pour un signal de N échantillons, le calcul de sa transformée de Fourier discrète nécessite typiquement N^2 opérations. Cette complexité importante a conduit Cooley et Tuckey à proposer en 1965 un nouvel algorithme, dit de transformée de Fourier rapide (en anglais Fast Fourier Transform, FFT), qui ne nécessite plus que $N \times \log N$ opérations, ce qui est un gain appréciable. La seule contrainte de la FFT est que le signal doit posséder un nombre d'échantillons qui soit une puissance de 2, ce qui oblige soit à compléter la série par des zéros jusqu'à que sa longueur satisfasse à ce critère, soit à l'interpoler pour aboutir à la même condition.

C.2.2 La fenêtre glissante

Alors que TFD et FFT nous fournissent une information spectrale satisfaisante mais "moyennée" sur un intervalle de temps, comment rétablir l'information dans le domaine temporel ? La méthode la plus intuitive et la plus basique est de fenêtrer le signal, c'est à dire de le limiter sur un intervalle de temps centré autour d'une certaine date, et de calculer le spectre uniquement à partir du signal restreint à cette fenêtre. L'amplitude obtenue pour une fréquence donnée est interprétée comme l'amplitude moyenne sur l'intervalle de fenêtrage, et, si la fenêtre est assez étroite, comme l'amplitude pour la date

¹La transformée de Fourier (TF) écrite sous cette forme (C.8) et (C.7) porte aussi le nom de TF "optique," par opposition aux formulations écrites avec la pulsation $\omega = 2\pi\nu$, et on notera qu'elle est correctement normalisée. Les normalisations des TF écrites sous d'autres formes peuvent se déduire facilement en se reportant à la TF optique.

²Une exponentielle complexe est un pic dans l'espace des fréquences, alors que c'est un signal invariant par translation (d'un multiple de la période) qui se prolonge indéfiniment dans le domaine temporel.

centrale de la fenêtre. En translatant la fenêtre le long des dates, on obtient des amplitudes pour plusieurs dates. Cette approche appliquée avec la transformée de Fourier constitue la transformée dite de Gabor³. La fenêtre glissante peut aussi être utilisée avec des estimations par moindres carrés : c'est la méthode que nous avons mise en oeuvre au Chapitre 2 de cette thèse.

C.2.3 La transformée en ondelettes

On peut imaginer une autre décomposition sur une autre base de fonctions orthogonales que les exponentielles complexes. En particulier, on peut choisir une base de fonctions qui soient à la fois bien localisées dans l'espace des fréquences, et bien localisées dans le temps. Ainsi, on aura à la fois une bonne résolution spectrale et une bonne résolution temporelle. C'est cette approche qui aboutit à la transformée en ondelettes, les ondelettes étant des fonctions possédant les critères de localisation évoqués plus haut :

$$F(\nu, \tau) = \int f(t)w_\tau(\nu, t)dt \quad (\text{C.9})$$

où τ est un paramètre temporel.

Les résultats des analyses en ondelettes donnent ainsi les variations temporelles des amplitudes spectrales, mais sont toutefois à considérer avec précautions. L'idéal d'une fonction très localisée à la fois dans le temps et dans les fréquences n'existe pas : si on améliore la résolution temporelle, on dégrade la résolution spectrale et vice-versa. La transformée en ondelettes est donc un compromis temporel/spectral et la résolution dans les deux domaines reste médiocre.

C.2.4 L'analyse spectrale singulière

Dans cette méthode dérivée de l'analyse en composantes principales, on décompose la série temporelle sur un nombre M (inférieur au nombre d'observations) de composantes statistiquement indépendantes. Pour ce faire, on plonge la série dans un espace de dimension M en construisant une séquence de vecteurs de dimension M à partir des valeurs de la série. La matrice de variance-covariance calculée avec ces vecteurs donne M vecteurs propres ainsi que leurs valeurs propres associées. Chaque vecteur propre définit une direction (ou Empirical Orthogonal Function, EOF) et permet d'obtenir une composante principale. L'importance de cette composante dans le signal est donnée par la valeur propre associée. Il est alors possible d'extraire un certain nombre de composantes incluant les tendances et les termes périodiques d'amplitudes variables et d'estimer le niveau de bruit. C'est cette méthode que nous avons utilisée pour extraire les composantes de Chandler et annuelle du mouvement du pôle dans le Chapitre 1 de ce travail. L'Annexe D présente une autre application du SSA pour l'analyse des résidus IAU2000A.

³La fenêtre est alors une gaussienne.

C.3 Caractérisation du bruit par la variance d'Allan

La variance d'Allan permet de déterminer le type de bruit présent dans un signal en fonction de la bande de fréquence étudiée. Rappelons que la variance d'Allan est une variance à deux échantillons (encore nommée variance de paire ou variance des différences premières). Cette grandeur qui permet de caractériser la stabilité des séries temporelles a été utilisée pour étudier la stabilité des horloges atomiques. La variance d'Allan est donnée par (voir par exemple Granveaud 1984 et les références associées) :

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2M} \sum_k (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \quad (\text{C.10})$$

où τ est l'intervalle de temps entre les deux échantillons y_{k+1} et y_k et M le nombre d'échantillons. Des rééchantillonnages successifs de la série pour plusieurs valeurs de τ permettent de connaître la variance d'Allan σ_A^2 pour diverses périodes τ et d'identifier le type de bruit. On montre ainsi que si la fonction $\sigma_A^2(\tau)$ en coordonnées logarithmiques présente une pente de -1, il s'agit d'un bruit blanc (signal dont la densité spectrale ne dépend pas de la fréquence f , chaque point est décorrélé du point précédent). Si la pente est nulle, cela correspond à un bruit dont la densité spectrale est en $1/f$, c'est à dire un bruit de scintillation (en anglais flicker noise). Le bruit de scintillation peut être représenté comme des sauts d'amplitudes aléatoires à des instants aléatoires. Il caractérise ainsi typiquement le bruit instrumental. Enfin, si la pente est de +1, il s'agit d'un bruit dont la fréquence varie en $1/f^2$, c'est à dire une marche aléatoire (chaque point dépend du ou des points précédents, processus auto-régressif).

Annexe D

Analyse des résidus IAU2000A

Dans cet exemple de traitement du signal, nous allons analyser les résidus de la nutation rapportés au modèle IAU2000A. Nous avons évoqué au premier Chapitre la présence prédominante dans ces résidus d’une oscillation rétrograde libre d’amplitude variable et dont la période est voisine de 430 jours et attribuée à la nutation libre du noyau (Free Core Nutation ou FCN). Plusieurs études sont consacrées aux analyses des résidus des observations VLBI rapportées au modèle IAU1980 (Herring et al. 1986, Capitaine et Caze 1991 et McCarthy et Luzum 1991). Herring et al. (1986) pose une borne supérieure à l’amplitude de la FCN (1 mas). Capitaine et Caze (1991) font remarquer la présence d’un terme circulaire de période 430 jours et d’amplitude de l’ordre 0.25 mas estimée sur l’intervalle 1979-1989. En revanche McCarthy et Luzum (1991) placent plutôt la FCN à une période de 418 jours. Roosbeek et al. (1999) analysent des séries d’observations de 1980 à 1998 et concluent que la période de la FCN reste entre 431 jours et 434 jours en admettant donc une légère variabilité temporelle de celle-ci.

La FCN ne se prête qu’à une modélisation empirique (Herring et al. 2002) à cause des fluctuations imprédictibles de son amplitude. La figure D.1 montre les quantités δX et δY entre 1985.0 et 2003.3 avec le spectres de Fourier associés. La FCN est nettement visible avec une amplitude proche de 70 μ as. Cette amplitude est l’amplitude moyenne sur l’intervalle de temps considéré, c’est à dire 1985.0-2003.3. Il est possible d’extraire la composante périodique sous-jacente à ce pic spectral en incluant ses variations temporelles d’amplitude (figures D.4 et D.5).

La figure D.2 montre la FCN provenant de l’analyse SSA et celle issue du modèle empirique de Herring et al. (2002). Herring a établi son modèle par ajustement d’un terme circulaire de 430 jours et d’un terme annuel sur des fenêtres de largeur 2 ans et déplacées de ce même intervalle. En outre, il suppose qu’entre les dates moyennes des ajustements, l’amplitude de la FCN varie linéairement et que celle du terme annuel est constante. Un tel ajustement à fenêtre très large explique les variations ”douces” de son amplitude et ne permet pas de détecter des changements rapides (sur des temps plus courts qu’une période). Le traitement SSA que nous implémentons dans cette étude en séparant les deux composantes X et Y montre une variation d’amplitude très brutale sur δX en 1990 et sur δY en 1988, variations que le modèle de Herring ne montre pas. Par contre, le changement de phase se produisant en 1999-2000 sur δX est bien visible à la fois dans l’étude de Herring et dans notre étude avec la méthode SSA. Afin de contrôler

les résultats du SSA, nous avons appliqué une série d'estimations par moindres carrés par fenêtre glissante, analogues à celles de Herring, mais en considérant séparément les deux composantes. Considérer les deux composantes séparément équivaut à estimer un terme elliptique et non plus un terme circulaire à la période de la FCN, et offre donc la possibilité d'enregistrer des amplitudes différentes sur X et Y . Les résultats sont sur la figure D.3. On remarque une amplitude plus faible sur la composante Y en 1985 et en 1988 et pour ces deux années, une modélisation par un terme elliptique au lieu de circulaire semble mieux adaptée.

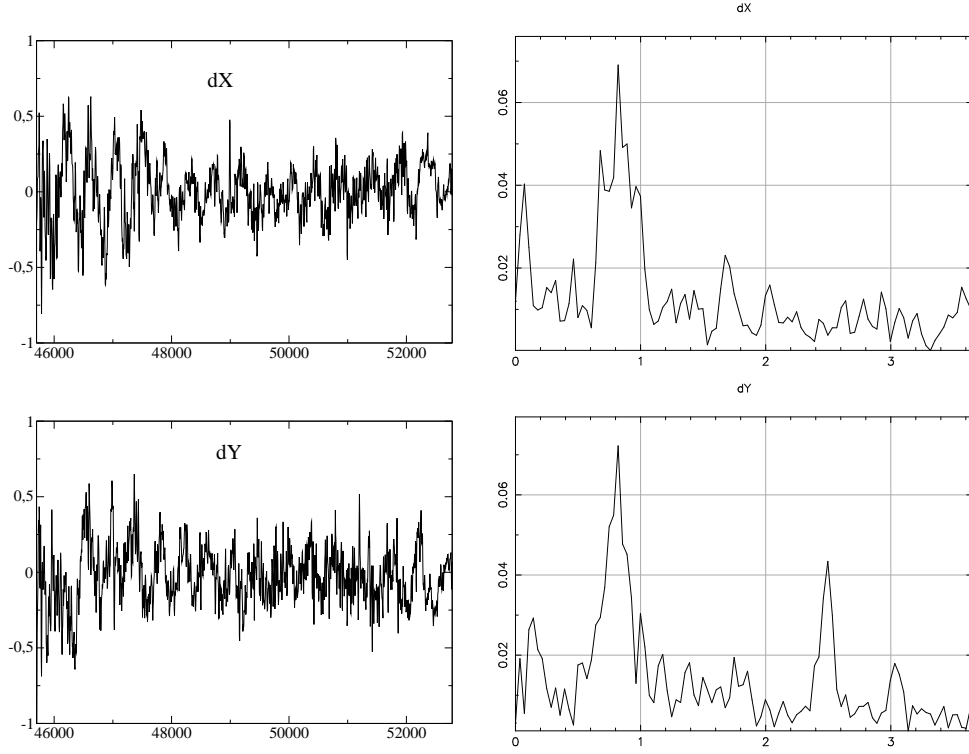


FIG. D.1 – Séries de δX et δY et spectres de Fourier. Unité : mas.

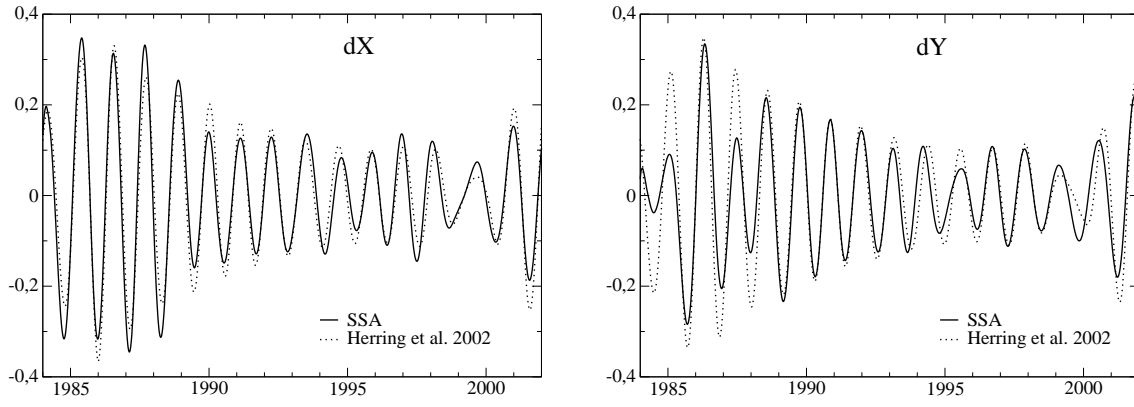


FIG. D.2 – Comparaison de la FCN issue du traitement SSA et du modèle de Herring et al. (2002). Unité : mas.

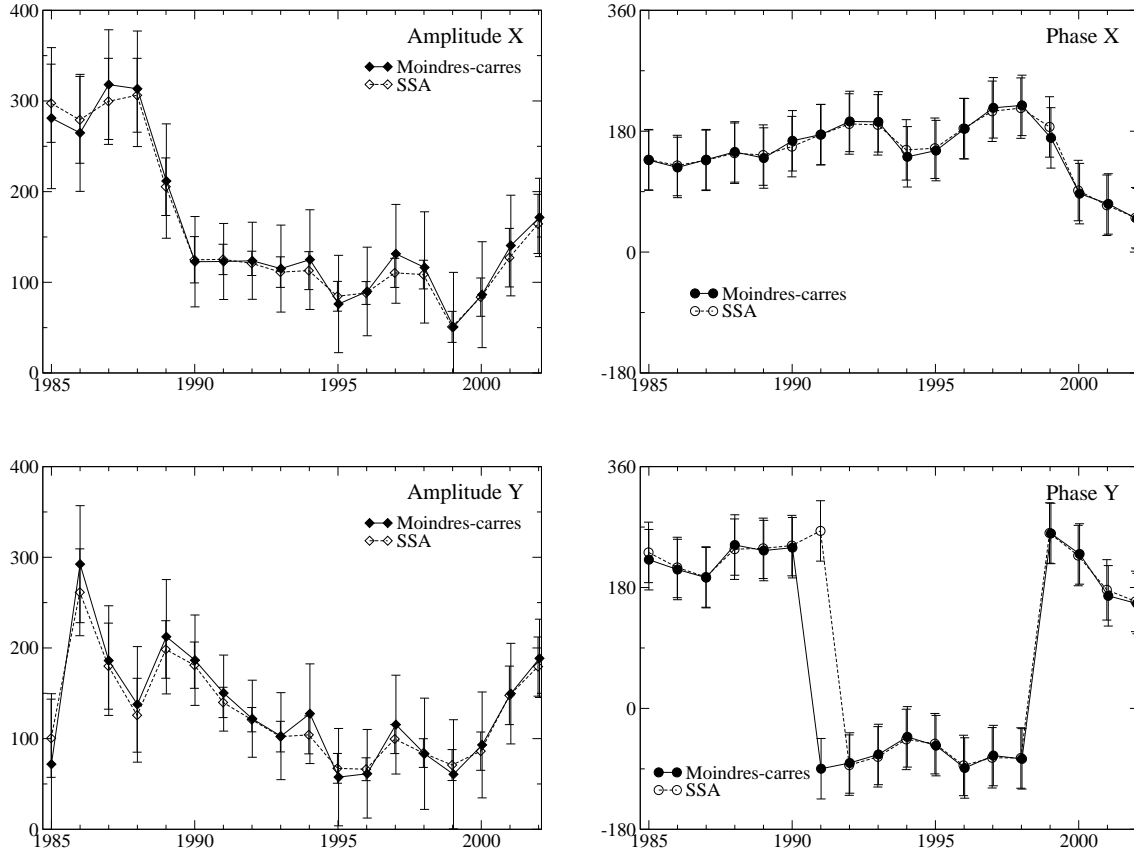


FIG. D.3 – Evolution de l'amplitude et de la phase de la FCN issue du traitement par moindres-carrés et du traitement SSA entre 1985 et 2002. Unité : μas , phases en degrés.

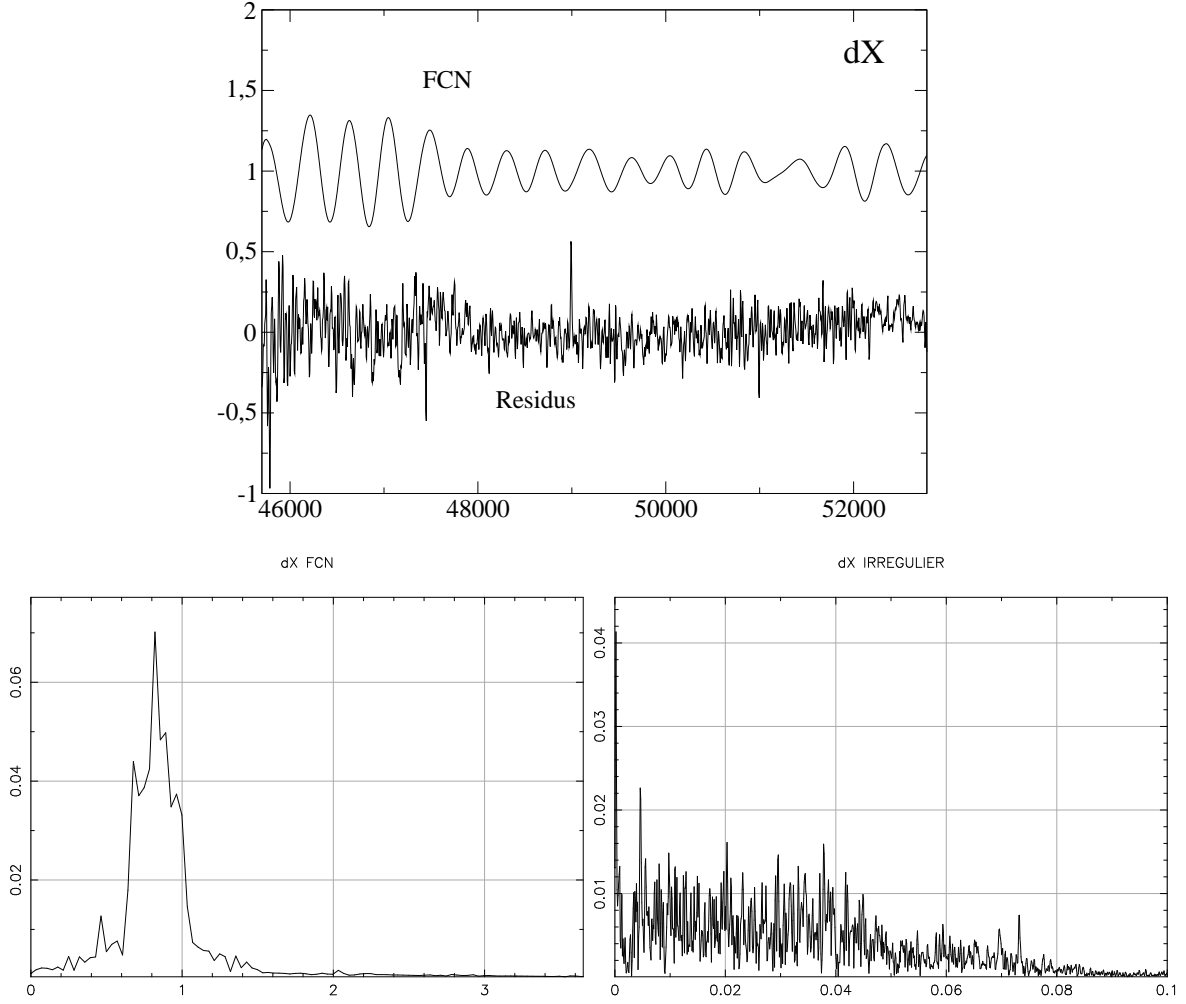


FIG. D.4 – Composante FCN dans δX (décalée de +1 mas) et résidus avec spectres de Fourier associés. Unité : mas. Le spectre de gauche est celui de la composante FCN, les fréquences sont en cycles par an. Celui de droite est le spectre des résidus, avec des fréquences en cycles par jour.

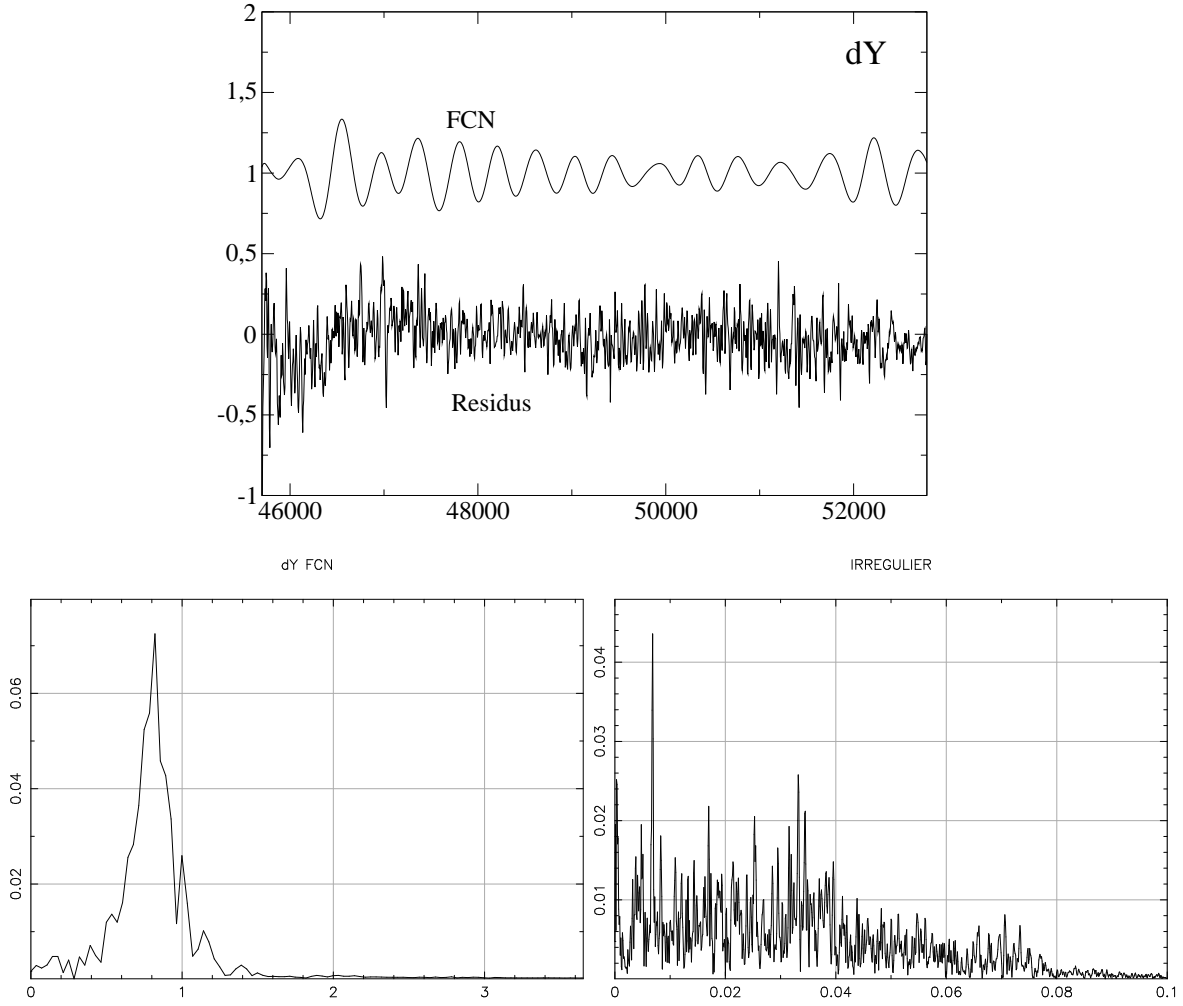


FIG. D.5 – Composante FCN dans δY (décalée de +1 mas) et résidus avec spectres de Fourier associés. Unité : mas. Le spectre de gauche est celui de la composante FCN, les fréquences sont en cycles par an. Celui de droite est le spectre des résidus, avec des fréquences en cycles par jour.

Annexe E

Quelques formules utiles...

E.1 Conversion de la date julienne modifiée en année besselienn

L'année besselienn A , dont la durée est 365.25 jours (solaires), en fonction du jour julien modifié mjd vaut :

$$A = 2000 - \frac{51544.5 - mjd}{365.25} \quad (\text{E.1})$$

E.2 J2000.0 et les dates juliennes

J2000.0 est le premier janvier 2000 à 12 heures UTC. Soit :

- jour julien modifié (mjd) 51544.5
- jour julien (jd) 2451544.0

E.3 Correspondance entre la fréquence dans la Terre et la fréquence dans l'espace

En raison de la rotation diurne de la Terre, un phénomène périodique est observé avec des périodes différentes dans le repère tournant ou dans le repère fixe. Ainsi, un phénomène de fréquence nulle dans l'espace (par exemple, la position d'une étoile), apparaît comme rétrograde diurne¹ dans la Terre. Un phénomène à longue période dans l'espace (par exemple le mouvement apparent annuel du Soleil sur la voûte céleste) devient un phénomène quasi-diurne dans la Terre. Au contraire, un phénomène stationnaire dans la Terre (par exemple la position d'une station à la surface du globe) est vu depuis l'espace comme un phénomène diurne prograde. On a donc la relation suivante entre les fréquences σ dans la Terre et σ' dans l'espace :

¹Le terme "diurne" se rapporte au jour sidéral correspondant à une rotation complète de la Terre d'un angle 2π .

$$\sigma' = \sigma + \Omega \quad (\text{E.2})$$

où $\Omega = 7.292115 \times 10^{-5}$ rad/s est la vitesse de rotation de la Terre. Cette transformation peut être illustrée par le schéma suivant.

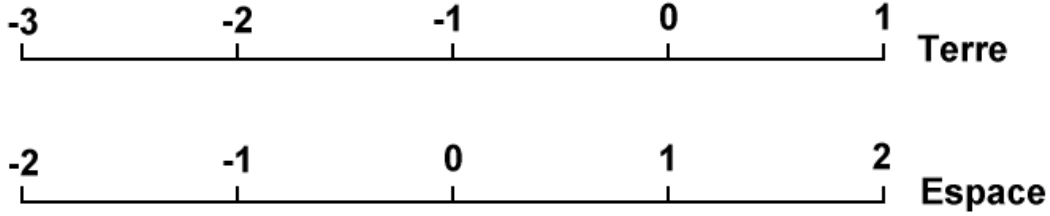


FIG. E.1 – Fréquences en cycles par jour comptées dans les repères tournant (Terre) et fixe (Espace).

E.4 Valeurs numériques

ϵ_0	$23^\circ 26' 21.448''$	Obliquité moyenne de l'écliptique à J2000.0	IERS 1996
K^2	$3.986\,004\,418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$	Constante de gravitation géocentrique	IERS 1996
μ_m	0.012 300 034 5	Rapport de la masse de la Lune à la masse de la Terre	IERS 1996
μ_s	$1.327\,124 \times 10^{20}$	Rapport de la masse du Soleil à la masse de la Terre	IERS 1996
C	$8.037 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$	Moment d'inertie axial	IERS 1996
A	$8.011 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$	Moment d'inertie équatorial	IERS 1996
C_m	$7.040 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$	Moment d'inertie axial du manteau	Barnes et al. 1983
A_m	$7.017 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$	Moment d'inertie équatorial du manteau	Barnes et al. 1983
a_m	384 747 980.645 m	Distance moyenne Terre-Lune	ELP 2000
a_s	149 597 870 691 m	Distance moyenne Terre-Soleil	ELP 2000
Ω	$7.292\,115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$	Vitesse de rotation moyenne de la Terre	IERS 1996
H_d	0.003 284 547 8	Ellipticité dynamique moyenne de la Terre	Mathews et al. 2002
κ	1.045×10^{-3}	Nombre de Love séculaire	Sasao et al. 1980
β	6.270×10^{-4}	Coefficient sans dimension	Sasao et al. 1980
γ	1.972×10^{-3}	Coefficient sans dimension	Sasao et al. 1980
ξ	2.252×10^{-4}	Coefficient sans dimension	Sasao et al. 1980

Bibliographie

- [1] Aoki, S., and Kinoshita, H., 1983, "Note on the relation between the equinox and Guinot's non-rotating origin," *Celest. Mech.*, **29**, pp. 335–360.
- [2] Barnes, R. T. H., Hide, R., White, A. A., and Wilson, C. A., 1983, "Atmospheric angular momentum fluctuations, length-of-day changes and polar motion," *Proc. R. Soc. Lond.*, **A 387**, pp. 31–73.
- [3] Bizouard, C., 1995, "Modélisation astrométrique et géophysique de la rotation de la Terre," Thèse de Doctorat, Observatoire de Paris, France.
- [4] Bizouard, C., Brzeziński, A., and Petrov, S. D., 1998, "Diurnal atmospheric forcing and temporal variations of the nutations amplitudes," *Journal of Geodesy*, **72**, pp. 561–577.
- [5] Bizouard, C., and Lambert, S., 2001, "Atmospheric and oceanic forcing in polar motion and length-of-day," *Proc. Journées Systèmes de Référence Spatio-Temporels*, Observatoire Royal de Belgique, Bruxelles, Belgique, pp. 69–73.
- [6] Bizouard, C., and Lambert, S., 2002a, "Lunisolar torque on the atmosphere and Earth's rotation," *Planetary and Space Science*, **50** (3) pp. 323–333.
- [7] Bizouard, C., and Lambert, S., 2002b, "Variable processes in polar motion and length-of-day," *Proc. Journées Systèmes de Référence Spatio-Temporels*, Bucarest, Roumanie, pp. 119–125.
- [8] Bolotin, S., Bizouard, C., Loyer, S., and Capitaine, N., 1996, "High frequency variations of the Earth's instantaneous angular velocity vector; determination from VLBI data analysis," *Astron. Astrophys.*, **317**, pp. 601–609.
- [9] Bretagnon, P., and Francou, G., 1988, "Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions," *Astron. Astrophys.*, **202**, pp. 309–315.
- [10] Bretagnon, P., Francou, G., Rocher, P., & Simon, J.-L. 1998, "SMART97 : a new solution for the rotation of the rigid Earth," *Astron. Astrophys.*, **329**, pp. 329–338.
- [11] Bretagnon, P., 2000, "Construction of a nonrigid Earth rotation solution using the model MHB2000," *Proc. Journées Systèmes de Référence Spatio-Temporels*, Observatoire de Paris, pp. 177–182.
- [12] Brzeziński, A., and Capitaine, N., 1993, "The use of the precise observations of the Celestial Ephemeris Pole in the analysis of geophysical excitation of Earth rotation," *J. Geophys. Res.*, **98**, **B4**, pp. 6667–6675.
- [13] Brzeziński, A., 1994, "Polar motion excitation by variations of the effective angular momentum function, II : extended model," *Manuscripta Geodaetica*, **19**, pp. 157–171.
- [14] Brzeziński, A., and Nastula, J., 2002, "Oceanic excitation of the Chandler wobble," *Adv. Space Res.*, **30**, No.2, pp. 195–200.

- [15] Brzeziński, A., Bizouard, C., and Petrov, S., 2002, "Influence of the atmosphere on Earth rotation : what new can be learned from the recent atmospheric angular momentum estimates?" *Surveys in Geophysics*, **23**, pp. 33-69.
- [16] Brzeziński, A., Nastula, J., and Ponte, R. M., 2003, "Oceanic excitation of the Chandler wobble using a 50-year time series of ocean angular momentum," in press.
- [17] Capitaine, N., Guinot, B., and Souchay, J., 1986, "A Non-Rotating Origin on the instantaneous equator : definition, properties and use," *Celestial Mech.*, **39**, pp. 283-307.
- [18] Capitaine, N., 1990, "The Celestial Pole Coordinates," *Celestial Mech. Dyn. Astr.*, **48**, pp. 127-143.
- [19] Capitaine, N., and Caze, B., 1991, "Deficiencies in the model for the celestial motion of the CEP as derived from a Goddard/VLBI series of pole offsets from 1979 to 1989," *Proceedings of IAU Colloquium 127*, edited by J. A. Hughes, C. A. Smith, and G. H. Kaplan., Virginia Beach, VA, pp. 222-224.
- [20] Capitaine, N., 2000, "The celestial pole and UT1 in the ICRS : the new IAU resolutions," *Proc. Journées Systèmes de Référence Spatio-Temporels*, Observatoire de Paris, pp. 70-77.
- [21] Capitaine, N., Guinot, B., and McCarthy, D. D., 2000, "Definition of the Celestial Ephemeris origin and of UT1 in the International Reference Frame," *Astron. Astrophys.*, **355**, pp. 398-405.
- [22] Capitaine, N., 2002, "Comparison of Old and New Concepts : The Celestial Intermediate Pole and Earth Orientation Parameters," *IERS Technical Note*, **29**, pp. 35-44.
- [23] Capitaine, N., Chapront, J., Lambert, S., and Wallace, P. T., 2003a, "Expressions for the Celestial Intermediate Pole and Celestial Ephemeris Origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model," *Astron. Astrophys.*, **400**, pp. 1145-1154.
- [24] Capitaine, N., Wallace, P. T., and McCarthy, D. D., 2003b, "Expressions to Implement the IAU 2000 Definition of UT1," *Astron. Astrophys.*, **406**, pp. 1135-1149.
- [25] Chapront, J., Chapront-Touzé, M., and Francou, G., 2002, "A new determination of lunar orbital parameters, precession constant and tidal acceleration from LLR measurements," *Astron. Astrophys.*, **387**, pp. 700-709.
- [26] Chapront-Touzé, M., and Chapront, J., 1983, "The lunar ephemeris ELP 2000," *Astron. Astrophys.*, **124**, pp. 50-62.
- [27] Chapront-Touzé, M., Chapront, J., and Francou, G., 1985, "Lunar solution ELP 2000-82B."
- [28] Dehant, V., 2002, "Report of IAU Working Group on Non-Rigid Earth Nutation Theory," *Highlights of Astronomy*, **12**, pp. 117-119.
- [29] Defraigne, P., and Smits, I., 1999, "Length of day variations due to zonal tides for an elastic Earth in non-hydrostatic equilibrium," *Geophys. J. Int.*, **139**, pp. 563-572.
- [30] Folkner, W. M., Charlot, P., Finger, M. H., Williams, J. G., Sovers, O. J., Newhall, X. X., and Standish, E. M., Jr., 1994, "Determination of the extragalactic-planetary frame tie from joint analysis of radio interferometric and lunar laser ranging measurements," *Astron. Astrophys.*, **287**, pp. 279-289.

- [31] Furuya, M., and Chao, B. F., 1996, "Estimation of period and Q of the Chandler wobble," *Geophys. Journal Int.*, **127**, pp. 693–702.
- [32] Granveaud, M., 1984, "Echelles de temps atomique," Thèse de Doctorat, Observatoire de Paris, France.
- [33] Gross, R. S., 2000a, "Excitation of the Chandler wobble," *Geophys. Res. Lett.*, **27**, pp. 2329–2332.
- [34] Gross, R. S., 2000b, "Combination of Earth-orientation measurements : SPACE97, COMB97 and POLE97," *Journal of Geodesy*, **73**, pp. 627–637.
- [35] Gross et al., 2003a, "Atmospheric and Oceanic Excitation of the Earth's Wobbles During 1980-2000," *J. Geophys. Res.*, **108**, **B8**, 2370, 10.1029/2002JB002143.
- [36] Gross et al., 2003b, "Atmospheric and Oceanic Excitation of Length-of-Day Variations During 1980-2000," submitted to *J. Geophys. Res.*.
- [37] Guinot, B., 1972, "The Chandlerian Wobble from 1900 to 1970," *Astron. Astrophys.*, **19**, pp. 207–214.
- [38] Guinot, B., 1979, "Basic Problems in the Kinematics of the Rotation of the Earth," in *Time and the Earth's Rotation*, McCarthy, D. D. and Pilkington, J. D. (eds.), D. Reidel Publishing Company, pp. 7–18.
- [39] Hefty, J., and Capitaine, N., 1990, "The fortnightly and monthly zonal tides in the Earth's rotation from 1962 to 1988," *Geophys. J. Int.*, **103**, pp. 219–231.
- [40] Herring, T. A., Gwinn, C. R., Shapiro, I. I., 1986, "Geodesy by Radio Interferometry : Studies of the Forced Nutation of the Earth ; 1. Data Analysis," *J. Geophys. Res.*, **91**, **B5**, pp. 4745–4754.
- [41] Herring, T. A., Mathews P. M., and Buffett, B. A., 2002, "Modeling of nutation-precession : Very long baseline interferometry results," *J. Geophys. Res.*, **107**, **B4**, 10.1029/2001JB000165.
- [42] Hide, R., Birch, N. T., Morrison, L. V., Shea, D. J., and White, A. A., 1980, "Atmospheric Angular Momentum fluctuations and changes in the length of the day," *Nature*, **286**, pp. 114–117.
- [43] IERS Conventions 2003, 2003, edited by D. D. McCarthy & G. Petit, to be published.
- [44] Jochmann, H., 1999, "The influence of continental water storage on the annual wobble of polar motion estimated by inverse solution," *Journal of Geodynamics*, **27**, pp. 147–160.
- [45] Johnson, T. J., Wilson, C. R., and Chao, B. F., 1999, "Oceanic angular momentum variability estimated from the Parallel Ocean Climate Model, 1988-1998," *J. Geophys. Res.*, **104**, **B11**, 25,183–25,196.
- [46] Kalnay, E., 1996, "The NCEP/NCAR 40-year Reanalysis Project," *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **77**, pp. 437–441.
- [47] Kinoshita, H., 1977, "Theory of the Rotation of the Rigid Earth," *Celest. Mech.* **15**, pp. 277–236.
- [48] Kinoshita, H., and Souchay, J., 1990, "The Theory of the Nutation for the Rigid Earth Model at the Second Order," *Celest. Mech.*, **48**, pp. 187–265.
- [49] Krasinsky, G. A., 1999, "Tidal effects in the Earth-Moon system and the Earth's rotation," *Celestial Mech. Dyn. Astr.*, **75**, pp. 39–66.

- [50] Kuehne, J., Wilson, C. R., and Johnson, S., 1996, "Estimates of the Chandler wobble frequency and Q ," *J. Geophys. Res.*, **101**, **B6**, pp. 13,573–13,579.
- [51] Lambeck, K., 1980, "The Earth's variable rotation : Geophysical causes and consequences," Cambridge University Press.
- [52] Lambert, S., and Bizouard, C., 2002, "Positioning the Terrestrial Ephemeris Origin in the International Terrestrial Reference Frame," *Astron. Astrophys.*, **394**, pp. 317–321.
- [53] Lambert, S., 2003, "Coupling between the Earth's rotation rate and precession-nutation," presented at IAUX XV General Assembly, JD16, Sydney, Australia.
- [54] Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., and Morando, B., 1977, "Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants," *Astron. Astrophys.*, **58**, pp. 1–16.
- [55] Ma, C., Arias, E. F., Eubanks, T. M., Fey, A. L., Gontier, A.-M., Jacobs, C. S., Sovers, O. J., Archinal, B. A., and Charlot, P., 1998, "The International Celestial Reference Frame as Realized by Very Long Baseline Interferometry," *Astron. J.*, **116**, pp. 516–546.
- [56] Mathews, P. M., Buffett, B. A., Herring, T. A., and Shapiro, I. I., 1991a, "Forced nutations of the Earth : influence of the inner core dynamics. 1. Theory," *J. Geophys. Res.*, **96**, **B5**, pp. 8219–8242.
- [57] Mathews, P. M., Buffett, B. A., Herring, T. A., and Shapiro, I. I., 1991b, "Forced nutations of the Earth : influence of the inner core dynamics. 1. Numerical results and comparisons," *J. Geophys. Res.*, **96**, **B5**, pp. 8243–8257.
- [58] Mathews, P. M., and Shapiro, I. I., 1992, "Nutations of the Earth," *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **20**, pp. 469–500.
- [59] Mathews, P. M., Herring, T. A., and Buffett, B. A., 2002, "Modeling of nutation-precession : New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth's Interior," *J. Geophys. Res.*, **107**, **B4**, 10.1029/2001JB000390.
- [60] McCarthy, D. D., and Luzum, B. J., 1991, "Observations of Luni-Solar and Free Core Nutation," *Astron. J.*, **102**, pp. 1889–1895.
- [61] McCarthy, D. D., 1996, IERS Conventions, *IERS Technical Note*, **21**, Observatoire de Paris, France.
- [62] McCarthy, D. D., and Luzum, B. J., 2003, "An Abridged Model of the Precession-Nutation of the Celestial Pole," *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, **85**, pp. 37–49.
- [63] Melchior, P., 1978, "The Tides of the Planet Earth," Pergamon Press.
- [64] Munk, W. H., and Groves, G., 1952, "The effect of winds and ocean currents on the annual variation in latitude," *Journal of Meteorology*, **9**, pp. 385–396.
- [65] Munk, W. H., and McDonald, G., 1960, "The rotation of the Earth," Cambridge University Press.
- [66] Newcomb, S., 1895, in *Astronomical Papers for the American Ephemeris and Nautical Almanac*, *AP*, **5**, Part IV-3.
- [67] Petrov, S., 1998, "Modeling geophysical excitation of the Earth rotation : stochastic and non linear approaches," Thèse de Doctorat, Polish Academy of Sciences, Poland.

- [68] Ponte, R. M., Stammer, D., and Marshall, J., 1998, "Oceanic signals in observed motions of the Earth's pole of rotation," *Nature*, **391**, pp. 476–479.
- [69] Ponte, R. M., 2002, Communication personnelle.
- [70] Ray, R. D., Steinberg, D. J., Chao, B. F., and Cartwright, D. E., 1994, "Diurnal and Semidiurnal Variations in the Earth's Rotation Rate Induced by Oceanic Tides," *Science*, **264**, pp. 830–832.
- [71] Roosbeek, F., 1995, "RATGP95 : technical note," Observatoire Royal de Belgique.
- [72] Roosbeek, F., Defraigne, P., Feissel, M., Dehant, V., 1999, "The free core nutation period stays between 431 and 434 sidereal days," *Geophys. Res. Lett.*, **26**, pp. 131–134.
- [73] Salstein, D. A., Kann, D. M., Miller, A. J., and Rosen, R. D., 1993, "The Sub-Bureau for Atmospheric Angular Momentum of the International Earth Rotation Service : a meteorological data center with geodetic applications," *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, **74**, pp. 64–80.
- [74] Sasao, T., Okubo, S., and Saito, M., 1980, "A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon nutational motion of the Earth," *Proc. of IAU Symposium 78*, edited by E. P. Federov, M. L. Smith, and P. L. Bender, D. Reidel, Hingham, Mass., pp. 165–183.
- [75] Seidelmann, P. K., 1982, "1980 IAU Nutation : The Final Report of the IAU Working Group on Nutation," *Celest. Mech.*, **27**, pp. 79–106.
- [76] Simon, J.-L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touzé, M., Francou, G., and Laskar, J., 1994, "Numerical Expressions for Precession Formulae and Mean Elements for the Moon and Planets," *Astron. Astrophys.*, **282**, pp. 663–683.
- [77] Souchay, J., 1988, "Définition d'un nouveau référentiel céleste et application à la rotation de la Terre," Thèse de Doctorat, Observatoire de Paris, France.
- [78] Souchay, J., and Kinoshita, H., 1997, "Corrections and new developments in rigid-Earth nutation theory. II. Influence of second-order geopotential and direct planetary effect," *Astron. Astrophys.*, **318**, pp. 639–652.
- [79] Souchay, J., Loysel, B., Kinoshita, H., and Folgueira, M., 1999, "Corrections and new developments in rigid Earth nutation theory : III. Final tables REN-2000 including crossed-nutation and spin-orbit coupling effects," *Astron. Astrophys. Supp. Ser.*, **135**, pp. 111–131.
- [80] Souchay, J., and Folgueira, M., 1999, "The effect of zonal tides on the dynamical ellipticity of the Earth and its influence on the nutation," *Earth, Moon and Planets*, **81**, pp. 201–216.
- [81] Torrence, C., and Compo, G. P., 1998, "A practical guide to wavelet analysis," *Bull. of the American Meteorological Society*, **79**, **1**, pp. 61–78.
- [82] de Viron, O., 1998, "Effet de l'atmosphère et de l'océan sur la rotation de la Terre ; Application au calcul des nutations," Thèse de Doctorat, Université de Louvain-la-Neuve, Belgique.
- [83] de Viron, O., and Dehant, V., 1999, "Earth's rotation and high frequency equatorial angular momentum budget of the atmosphere," *Surveys in Geophysics*, **20**, pp. 441–462.

- [84] de Viron, O., Bizouard, C., Salstein, D., and Dehant, V., 1999, "Atmospheric torque on the Earth and comparison with atmospheric angular momentum," *J. Geophys. Res.*, **104**, pp. 4861–4875.
- [85] Vondrák, J., 1985, "Long period behaviour of polar motion between 1900.0 and 1984.0," *Annales Geophys.*, **3**, p. 351.
- [86] Vondrák, J., 1988, "Is Chandler frequency constant?" The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics, A. K. Babcock and G. A. Wilkins (eds.), pp. 359–364.
- [87] Whar, J. M., and Sasao, T., 1981, "A diurnal resonance in the ocean tide and in the Earth's load response due to the resonant free core nutation," *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **64**, pp. 747–765.
- [88] Whar, J. M., 1982, "The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble – I. Theory," *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **70**, pp. 349–372.
- [89] Whar, J. M., 1983, "The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble and on the seasonal variations of the length of day – II. Results," *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **74**, pp. 451–487.
- [90] Wahr, J. M., 1981, "The forced nutation of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth," *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **64**, pp. 705–727.
- [91] Wilson, C. R., and Vicente, R. O., 1980, "An analysis of the homogeneous ILS polar motion series," *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **62**, pp. 605–616.
- [92] Wilson, C. R., and Vicente, R. O., 1981, "Estimates of Chandler's component of polar motion as derived from various data sets," *Astron. Nachr.* **Bd 302 H5**, pp. 227–232.
- [93] Wilson, C. R., and Vicente, R. O., 1990, "Maximum likelihood estimates of polar motion parameters," *Variations in Earth Rotation, Geophys. Mono. Ser.*, **59**, edited by D. D. McCarthy and W. E. Carter, AGU, Washington, D.C., pp. 151–155.
- [94] Wilson, C. R., and Vicente, R. O., 1997, "On the variability of the Chandler frequency," *J. Geophys. Res.*, **102**, **B9**, pp. 20,439–20,445.
- [95] Woolard, E. W., 1953, *Astr. Pap. Amer. Naut. Almanach XV*, **I**, pp. 1–165.
- [96] Wunsch, J., 2000, "Oceanic influence on the annual polar motion," *Journal of Geodynamics*, **30**, pp. 389–399.
- [97] Yoder, C. F., Williams, J. G., and Parke, M. E., 1981, "Tidal variations of Earth rotation," *J. Geophys. Res.*, **86**, pp. 881–891.
- [98] Yseboodt, M., de Viron, O., Chin, T. M., and Dehant, V., 2002, "Atmospheric excitation of the Earth's nutation : comparison of different atmospheric models," *J. Geophys. Res.*, **107**, **B2**, 10.1029/2002JB000042.